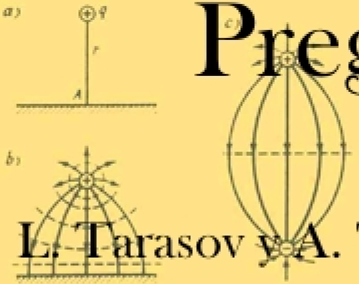
Pregunta y Problemas de Física



L. Tarasov y A. Tarasova

Preparado por Patricio Barros

Prefacio

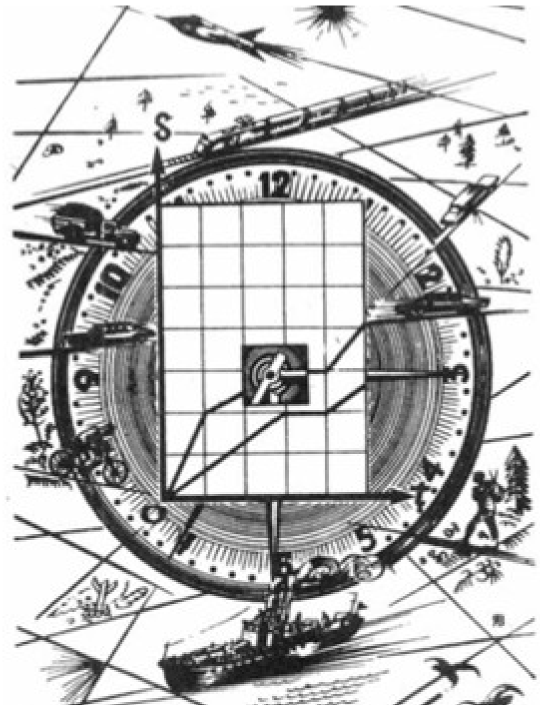
Los autores de este libro han sabido, en la forma más expresiva del diálogo, analizar profundamente casi todas las preguntas del programa y en especial aquellas que son de difícil comprensión.

En el libro se hace un análisis detallado de los errores más característicos que cometen los estudiantes. El texto ha sido escrito de manen singular, sencilla y amena, las preguntas difíciles se discuten desde diferentes puntos de vista, los dibujos bien detallados (que en el libro son numerosos) ayudan a comprender más profundamente la idea de los autores.

Los autores de esta obra son profesores, del Instituto de Construcción de Maquinaria Electrónica de Moscú.

La alta calificación de los autores, en combinación con la viveza y comprensibilidad de la exposición, hacen este libro muy útil para los estudiantes en la etapa inicial de sus estudios de la Física.

Capítulo 1



¡No descuide la cinemática! El problema acerca de cómo se desplazan loa cuerpos en el espacio y en el tiempo es de gran interés tanto desde el punto de vista de la Física como desde el punto de vista práctico.

§1. ¿SABE USTED ANALIZAR GRÁFICAMENTE LA CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO?

PROFESOR: Usted ha analizado anteriormente las gráficas de la velocidad y del camino recorrido respecto al tiempo para el movimiento rectilíneo uniformemente variable. En relación con esto le formulo la siguiente pregunta.

Supongamos que la gráfica velocidad-tiempo tiene la forma representada en la *Figura 1*, a partir de ésta, construya la gráfica del camino recorrido en función del tiempo.

ESTUDIANTE: Nunca he dibujado tales gráficas.

PROFESOR: Esto no es nada complicado. Vamos a razonar juntos. Dividamos el tiempo total empleado en tres intervalos: 1, 2 y 3 (ver *Figura 1*). ¿Cómo se mueve el cuerpo durante el intervalo 1? ¿Cuál será la fórmula para el camino recorrido en dicho intervalo?

ESTUDIANTE: En el intervalo 1, el movimiento del cuerpo es uniformemente acelerado sin velocidad inicial. La fórmula para el camino recorrido es, en este caso, la siguiente:

$$s(t) = at^2 / 2 \qquad (1)$$

donde *a* es la aceleración del cuerpo.

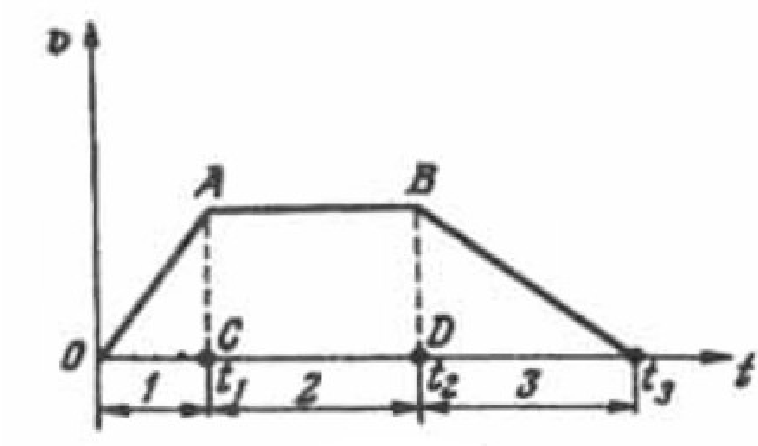


Figura 1

PROFESOR: ¿Podría usted utilizando la gráfica de la velocidad, encontrar la aceleración?

ESTUDIANTE: Sí. La aceleración, que es la variación de la velocidad, en la unidad de tiempo, es igual a la razón entre los segmentos *AB : OB*.

PROFESOR: Bien. Ahora analice los intervalos 2 y 3.

ESTUDIANTE: En el intervalo 2, el cuerpo tiene un movimiento uniforme con una velocidad v, la cual alcanzó al final del intervalo 1. La fórmula para el camino recorrido es:

$$s = vt$$

PROFESOR: Su respuesta no es precisa. Usted no tuvo en cuenta, que el movimiento uniforme empezó en el momento *i* y no en el instante inicial. Durante este tiempo el cuerpo ya ha recorrido un camino igual a $a_1t^2/2$. En el intervalo 2 la dependencia del camino recorrido respecto al tiempo tiene la siguiente expresión:

$$s(t) = at_1^2/2 + v(t_2 - t_1) \quad (2)$$

Teniendo en cuenta esta observación, escriba la fórmula del camino recorrido para el intervalo 3.

ESTUDIANTE: En el intervalo 3 el movimiento es uniformemente retardado. Si he comprendido bien, en este caso la fórmula para el camino recorrido debe tener la siguiente expresión:

$$s(t) = at_1^2/2 + v(t_2 - t_1) + v(t - t_2) - a_1(t - t_2)^2/2$$

donde a_t es la aceleración en el intervalo 3. Esta es dos veces menor que la aceleración a en 1, puesto que el intervalo 3 es dos veces más largo que el 1.

PROFESOR: Su fórmula se puede simplificar un poco

$$s(t) = at_1^2/2 + v(t - t_1) - a_1(t - t_2)^2/2 \quad (3)$$

Ahora usted simplemente puede sumar los resultados obtenidos en (1) — (3).

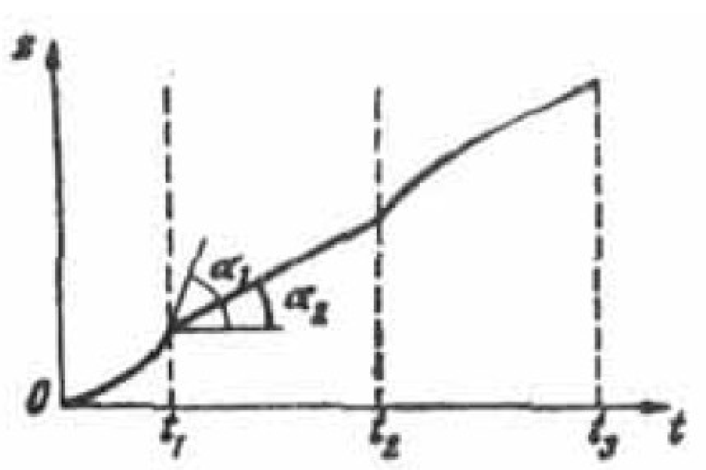


Figura 2

ESTUDIANTE: Si entiendo. En 1 la gráfica del camino recorrido es una parábola, en 2 es una línea recta y por último en el intervalo 3 es nuevamente una parábola, pero invertida (convexa hacia arriba). Esta es mi gráfica (*Figura 2*).

PROFESOR: Su dibujo no es totalmente correcto. La curva del camino recorrido no debe ser una línea quebrada, debe ser representada por una línea suave, es decir, las parábolas deben confundirse con la línea recta. Además, el vértice de la segunda parábola debe corresponder al instante de tiempo *t*. Esta gráfica es la correcta (*Figura 3*).

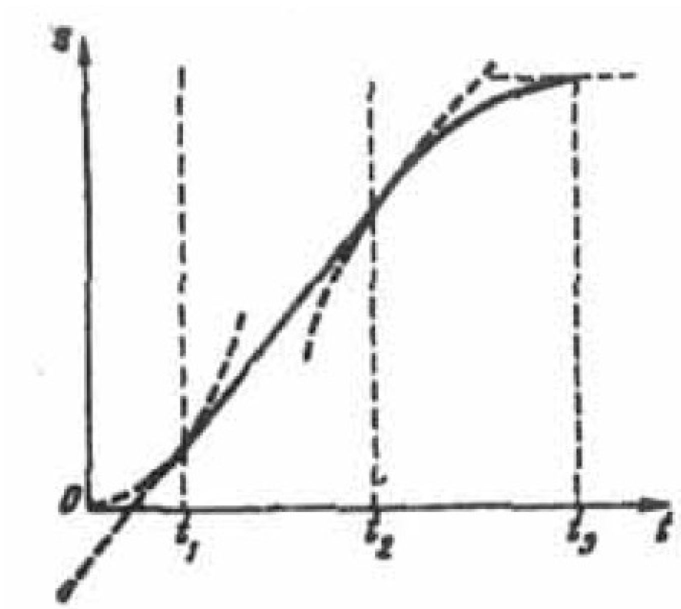


Figura 3

ESTUDIANTE: Explíqueme por favor.

PROFESOR: Analicemos una parte de alguna otra gráfica del camino recorrido durante un cierto intervalo de tiempo (*Figura 4*). La velocidad media del cuerpo en el intervalo desde *t* hasta $t + \Delta t$ es igual a

$$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = tg\alpha$$

donde α es el ángulo que forma la cuerda *AB* con la horizontal. Para calcular la velocidad del cuerpo en el instante *t*, hay que encontrar el limite de las velocidades medias cuando $\Delta t \to 0$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

En el límite, la cuerda se convierte en la tangente de la curva en el punto *A* (ver la línea punteada en la *Figura 4*).

El valor de la velocidad en el instante *t*, será igual a la pendiente de la tangente en *A*. Por lo tanto, se puede hallar la velocidad de un cuerpo en cualquier instante del tiempo por las pendientes de las tangentes a la gráfica del camino recorrido.

Regresemos ahora a la gráfica (*Figura 2*). De ésta se concluye que en el instante t_1 (y en el instante t_2), la velocidad del cuerpo tiene dos valores diferentes: si nos acercamos hacia *t* por la izquierda, la velocidad será igual a la $tg\alpha_1$, mientras que si nos acercamos a este mismo punto desde la derecha, la velocidad tendrá un valor igual a la $tg\alpha_2$

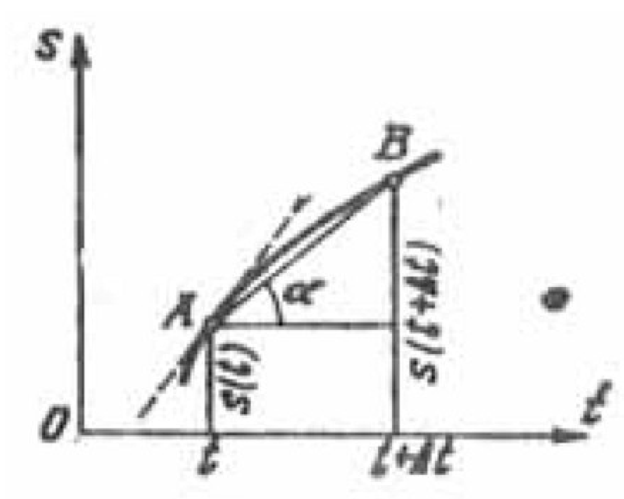


Figura 4

Según se gráfica la velocidad del cuerpo en el instante t_1, (lo mismo que en t_2) sería una línea interrumpida, lo que en realidad no se observa (la gráfica de la velocidad en la *Figura 1* es una línea continua)

ESTUDIANTE: He entendido. La continuidad de la línea que representa la gráfica de la velocidad conduce a la suavidad de la curva del camino recorrido.

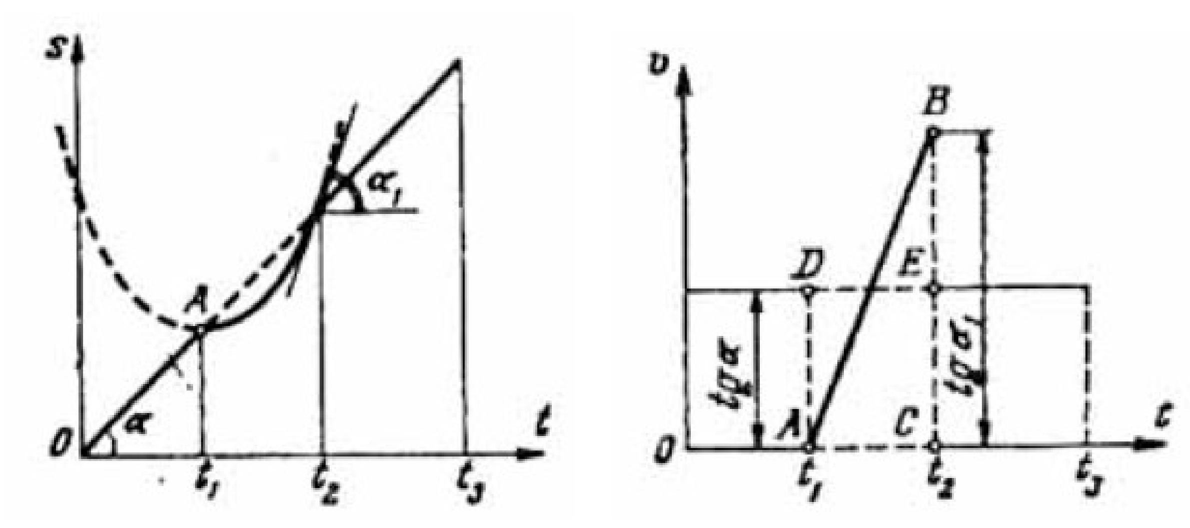
PROFESOR: Hablando al respecto, los vértices de las parábolas deben corresponder a los tiempos *0* y t_3, ya que en tales instantes la velocidad del cuerpo es igual a cero y las tangentes a la curva del camino recorrido, deben ser horizontales en dichos puntos.

Ahora, utilizando la gráfica de la velocidad de la *Figura 1*, halle el camino recorrido por el cuerpo, por ejemplo, hasta el instante t_1.

ESTUDIANTE: Es necesario, con ayuda de la gráfica de la velocidad, determinar la aceleración *a* en el intervalo 1 y la velocidad *v* en el intervalo 2 y luego aplicar la fórmula (2). El camino recorrido durante el tiempo t_2, es igual a

$$s(t_2) = at_1^2/2 + v(t_2 - t_1)$$

PROFESOR: Correcto, sin embargo, se puede obrar en forma más sencilla. El camino recurrido por el cuerpo durante el tiempo t_2, es numéricamente igual al área de la figura *OABD*, formada por la gráfica de la velocidad en el intervalo Ot_2. Para fijar mejor todos estos conceptos, consideremos un problema más.



Figuras 5 y 6

Supongamos que la gráfica del camino recorrido es la línea discontinua representada en la *Figura 5*. La línea punteada es una parábola con vértice en el punto *A*. Construyes la gráfica de la velocidad.

ESTUDIANTE: Como la gráfica del camino recorrido es una línea discontinua, la gráfica de la velocidad debe tener rupturas en los instantes correspondientes (t_1 y t_2). Esta es mi gráfica (*Figura 6*).

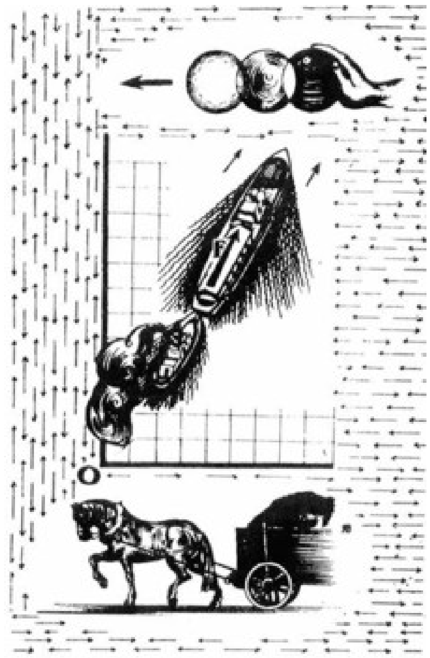
PROFESOR: Bien. ¿Y a qué es igual el segmento *BC*?

ESTUDIANTE: Es igual a la $tg\alpha_1$ (ver *Figura 5*), pero no sabemos el valor del ángulo.

PROFESOR: A pesar de esto, es muy sencillo encontrar el valor de *AC*; observe que el cuerpo recorre durante el tiempo t_3 exactamente el mismo camino que recorrería si se moviera uniformemente durante todo este intervalo. (La línea recta en el intervalo de t_2, a t_3, de la *Figura 5,* es la continuación de la recta en el intervalo de *0* a t_1).

Como el camino recorrido se mide por el área bajo la curva de la velocidad, entonces, el área del rectángulo *ADEC* de la *Figura 6* será igual al área del triángulo *ABC*, de donde obtenemos que *BC-2EC*, es decir, la velocidad en el instante t_2 cuando nos acercamos a éste desde la izquierda, es el doble de la velocidad que corresponde al movimiento uniforme en los intervalos, desde *O* a t_1 y desde t_2 a t_3.

Capítulo 2



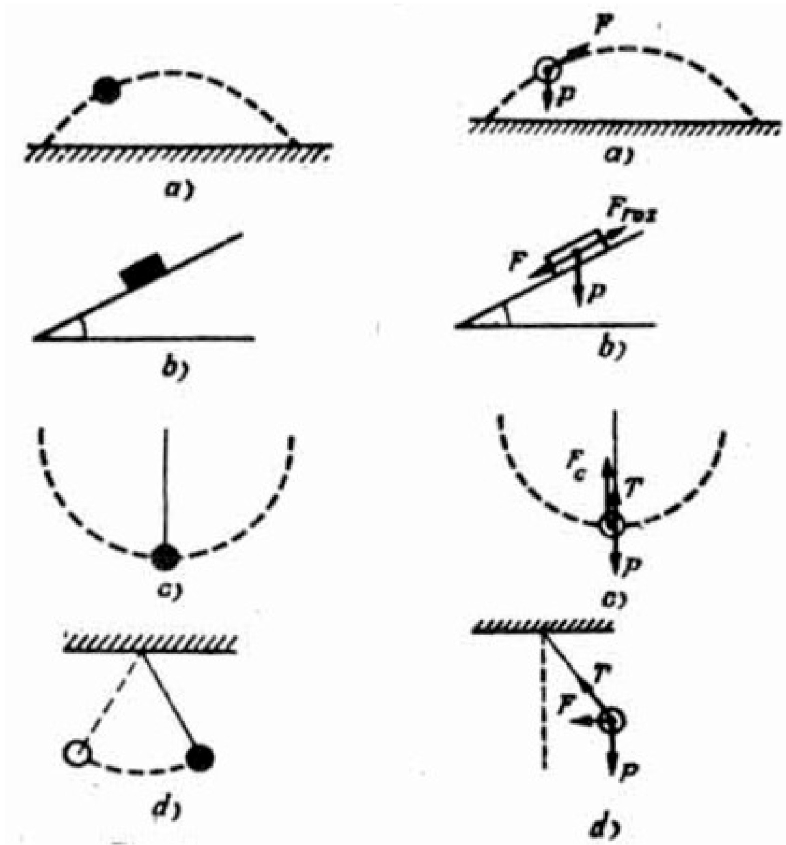
El concepto de fuerza es uno de los conceptos fundamentales de la Física. ¿Sabría usted utilizar correctamente este concepto? ¿Conoce bien las leyes de la dinámica?

§2. ¿PODRÍA UD. INDICAR QUÉ FUERZAS ACTÚAN SOBRE UN CUERPO?

ESTUDIANTE: Los problemas de la mecánica me parecen los más difíciles. ¿En base a qué se debe empezar su solución?

PROFESOR: En la mayoría de los casos se debe empezar por el análisis de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Consideremos algunos ejemplos (figura 7): a) un cuerpo es lanzado formando un ángulo con la horizontal; b) un cuerpo se desliza por un plano inclinado; c) un cuerpo atado a una cuerda gira sobre el plano vertical; d) un péndulo simple. Explique y haga un diagrama de las fuerzas aplicadas a los cuerpos en cada uno de los casos anteriores.

ESTUDIANTE: Esta es mi gráfica (figura 8). En el primer caso: P es el peso del cuerpo, F es la tuerza de lanzamiento. En el segundo caso: P es el peso; F, la Fuerza de deslizamiento; F_r, fuerza de rozamiento. En el tercer caso: P es el peso; F_c. la fuerza centrípeta; T, la tensión de la cuerda. En el cuarto caso: P es el peso; F, la fuerza de restitución; T, tensión de la cuerda.



Figuras 7 y 8

PROFESOR: Usted ha errado en todos los casos. Este es el diagrama correcto (figura 9). Es necesario comprender muy bien que toda fuerza aparece como resultado de la interacción de cuerpos. Por lo tanto, para representar las fuerzas aplicadas a un cuerpo hay que responder antes a la pregunta: ¿Qué cuerpos interaccionan con el objeto considerado? Así, en el primer caso, la Tierra atrae al objeto considerado y es el único cuerpo que interacciona con éste (figura 9, a). Por lo tanto, el cuerpo está sometido a la acción de una sola fuerza: su propio peso. Si tomamos en cuenta la resistencia de aire, o la acción del viento, por ejemplo, entonces habría que introducir otras fuerzas suplementarias. «Fuerzas de lanzamiento», como la que usted indica en su diagrama, no existen en la naturaleza, puesto que no hay interacción, que conduzca a la presencia de una fuerza semejante.

ESTUDIANTE: Pero si para lanzar un cuerpo, sobre éste necesariamente debe actuar una fuerza.

PROFESOR: Es cierto. Cuando usted lanza un cuerpo, le aplica a éste una determinada fuerza. Sin embargo, en el caso considerado antes, se analiza el movimiento del cuerpo después de lanzado, es decir, después de desaparecer la acción de su fuerza, la cual le comunicó al cuerpo una determinada velocidad inicial de lanzamiento. Es imposible «acumular» fuerzas; tan pronto termina la interacción de los cuerpos, desaparecen las fuerzas.

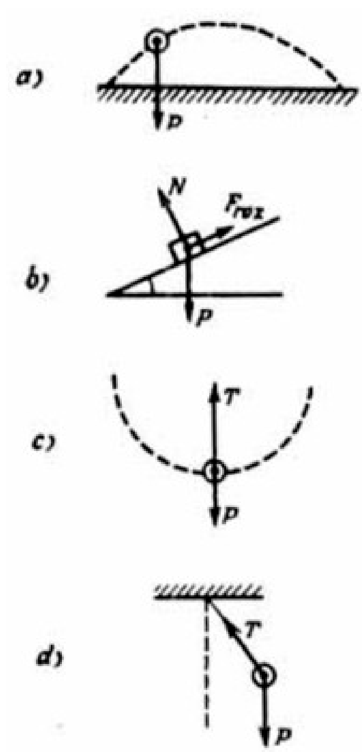


Figura 9

ESTUDIANTE: Pero si sobre el cuerpo actúa nada más que su peso, ¿por qué entonces éste no cae verticalmente, sino que describe una trayectoria determinada?

PROFESOR: A usted le parece extraño que en este caso la dirección del movimiento del cuerpo no coincida con la de la fuerza que actúa sobre éste. No obstante, todo esto está plenamente de acuerdo con la segunda ley de Newton. Su pregunta hace pensar que usted no ha reflexionado detenidamente sobre las leyes de la dinámica de Newton. Yo sugiero detenernos más adelante en esto (ver § 4) mientras que, por ahora continúo con el análisis de los cuatro ejemplos anteriores del movimiento de un cuerpo.

En el segundo caso (figura 9, b): ¿Qué cuerpos interaccionan con el bloque?

ESTUDIANTE: Según mi criterio, dos cuerpos: la Tierra y el plano inclinado.

PROFESOR: El peso P es resultado de la interacción de la Tierra con el cuerpo, mientras que la fuerza de rozamiento Fr y la reacción de apoyo N. llamada también fuerza normal, son resultado de la interacción del plano inclinado con el cuerpo. Advierto que en su diagrama no aparece esta fuerza N.

ESTUDIANTE: Pero, ¡un momento! ¿Resulta entonces, que el plano inclinado acciona sobre el bloque con dos fuerzas en lugar de una?

PROFESOR: La fuerza, por supuesto, es una sola. Sin embargo para su análisis, es más cómodo descomponerla en dos componentes una de las cuales es paralela al plano (la fuerza de rozamiento) y la segunda, en dirección perpendicular a éste (la fuerza de reacción del apoyo). El hecho, de que estas dos fuerzas tengan un origen común, es decir, sean las componentes de una misma fuerza, se refleja en la siguiente relación universal que existe entre F_r y N:

$$F_r = kN \qquad (5)$$

donde k es una constante, llamada coeficiente de rozamiento. Más adelante, analizaremos esta relación con más detalles (ver § 3).

ESTUDIANTE: En mi diagrama, he representado la fuerza de deslizamiento F. Sin embargo, en base a lo que usted dice, tal fuerza no existe. ¿Por qué, entonces, antes hemos utilizado frecuentemente el término «fuerza de deslizamiento»?

PROFESOR: Sí, en realidad dicho término existe. Pero se debe tener en cuenta, que esta fuerza es simplemente una

de las componentes del peso del bloque, que aparece al descomponer el peso en dos fuerzas. una en la dirección del plano inclinado y la otra en dirección perpendicular a éste. Si usted en el diagrama de las fuerzas aplicadas al cuerpo ha indicado su peso, no hay entonces necesidad de representar la fuerza de deslizamiento, es decir, la componente del peso paralela al plano inclinado.

En el tercer caso (figura 9, c) el cuerpo gira en un plano vertical. ¿Qué cuerpos actúan sobre el objeto considerado?

ESTUDIANTE: Dos cuerpos: la Tierra y la cuerda.

PROFESOR: Correcto. Por esta razón, sobre el cuerpo que gira actúan dos fuerzas: su peso y la tensión de la cuerda.

ESTUDIANTE: ¿Y la fuerza centrípeta?

PROFESOR: ¡Un momento! Precisamente en los problemas sobre el movimiento circular es muy fácil errar y por esta razón es preciso estudiarlos con más detalles (ver §8); aquí me limito simplemente a indicar que la fuerza centrípeta no es una fuerza más, sino la resultante de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo. En el ejemplo considerado (cuando el cuerpo se encuentra en el punto más bajo de su trayectoria) la fuerza centrípeta es igual a la diferencia entre la tensión de la cuerda y el peso del cuerpo.

ESTUDIANTE: Si he entendido correctamente, en el cuarto caso (figura 9, d), la fuerza restitutoria es también la resultante de dos fuerzas, la del peso y la de tensión de la cuerda.

PROFESOR: Exactamente. Tanto en este caso como en el tercero, interaccionan con el objeto considerado la cuerda y la Tierra y por lo tanto, el cuerpo está sometido a la acción de dos fuerzas: la tensión de la cuerda y el peso. Quiero subrayar una vez más, que toda fuerza aparece como resultado de la interacción de cuerpos y no por otras causas. Si usted sabe qué cuerpos accionan sobre el objeto considerado, usted podrá deducir las fuerzas que actúan sobre éste.

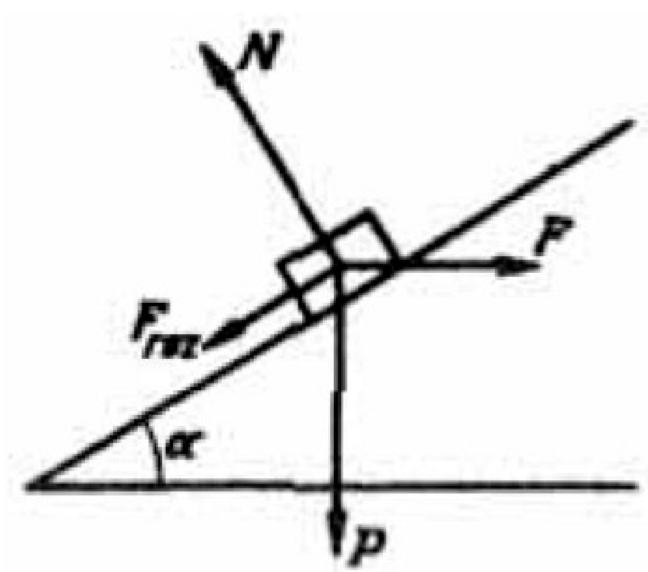
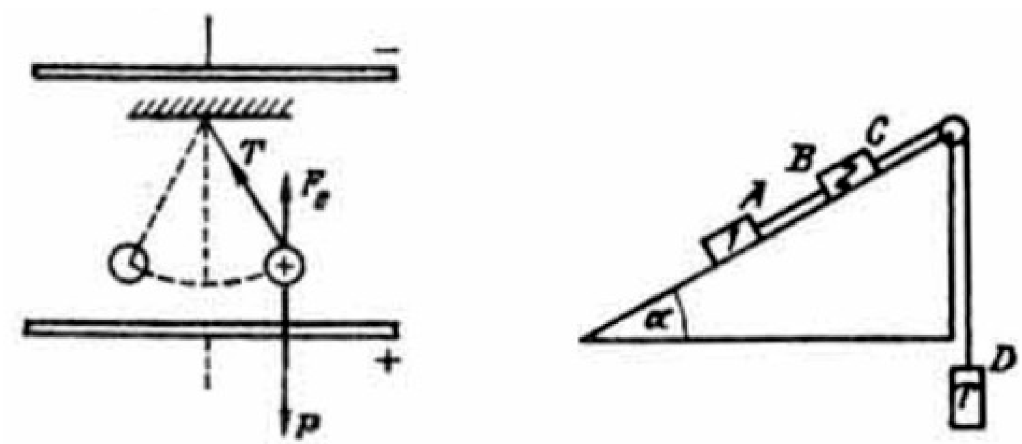


Figura 10

ESTUDIANTE: Seguramente habrá ejemplos más difíciles que los que usted ha considerado en los diagramas de la figura 7. ¿Podría usted estudiar algunos de esos problemas?

PROFESOR: Existen muchos problemas más difíciles sobre interacción de cuerpos. Por ejemplo, hacemos presión sobre un bloque por medio de una fuerza horizontal constante F. haciendo que el cuerpo suba por un plano inclinado. Las fuerzas aplicadas al bloque en este caso están representadas en la figura 10.

Otro ejemplo. Las oscilaciones de un péndulo cargado eléctricamente al introducirlo dentro de un condensador plano. En este caso, aparece una fuerza complementaria F_c, con la cual el campo eléctrico del condensador actúa sobre la carga eléctrica del péndulo (figura 11). Se sobreentiende que es prácticamente imposible enumerar todos los casos que podríamos encontrar al resolver problemas de esta índole.



Figuras 11 y 12

ESTUDIANTE: ¿Cómo se debe proceder, cuando en un problema intervienen varios cuerpos? Tomemos, por ejemplo. el problema representado en la figura 12.

PROFESOR: En cada caso usted debe tener bien claro a qué cuerpo (o conjunto de cuerpos) corresponde el movimiento que usted quiere analizar. Veamos, por ejemplo, el movimiento del cuerpo 1 en el problema que usted ha propuesto. Con este cuerpo interaccionan la Tierra, el plano inclinado y la cuerda AB.

ESTUDIANTE: ¿Y el cuerpo 2 no interacciona con el cuerpo 1?

PROFESOR: Sólo por intermedio de la cuerda AB. Las fuerzas aplicadas al cuerpo 1 son: su peso P', la fuerza de rozamiento F'_1, la reacción N' y la tensión T_1 de la cuerda AB, (figura 13, a).

ESTUDIANTE: ¿Por qué en su gráfica, la fuerza de rozamiento está dirigida hacia la izquierda? Me parece que de igual manera habría podido escoger la dirección contraria.

PROFESOR: Para determinar la dirección de la fuerza de fricción, hay que saber en qué dirección se mueve el cuerpo.

Si esto no se dice en el enunciado del problema, entonces, hay que suponer una u otra dirección. En el caso considerado, he supuesto que el cuerpo l se mueve (junto con todo el sistema de cuerpos) hacia la derecha, la polea gira en el sentido de las agujas del reloj. Claro está que esto no lo sabía con anterioridad, la dirección del movimiento queda determinada solamente después de reemplazar los valores numéricos. Si me equivoco entonces, al calcular la aceleración obtengo un valor negativo. En tal caso hay que suponer que el cuerpo se mueve hacia la izquierda y no hacia la derecha (la polea gira en el sentido contrario a las agujas del reloj), dirigir luego la fuerza de fricción en la dirección debida, obtener la fórmula para el cálculo .de la aceleración y entonces comprobarla según el signo que obtengamos después de reemplazar los valores numéricos correspondientes.

ESTUDIANTE: ¿Y para qué comprueba por segunda vez el signo de la aceleración? Si al suponer el movimiento hacia la derecha, ésta resultó negativa, entonces es evidente que al suponer lo contrario, resultara positiva.

PROFESOR: No siempre. Puede resultar negativa incluso en el segundo caso.

ESTUDIANTE: Esto no lo entiendo. Luego, ¿no es evidente que si no se mueve hacia la derecha, se mueve hacia la izquierda?

PROFESOR: Usted olvida que el cuerpo además puede permanecer en reposo. Más tarde regresaremos a esta pregunta y entonces haremos un análisis mas profundo de las dificultades que pueden aparecer al analizar las fuerzas de fricción (ver § 7). Por el momento vamos a suponer, que la polea gira en el sentido de las agujas del reloj y analizaremos el movimiento del cuerpo 2.

ESTUDIANTE: Con el cuerpo 2 interaccionan: la Tierra, el plano inclinado y las cuerdas AB y CD. Las fuerzas aplicadas al cuerpo 2, están indicadas en la figura 13, b.

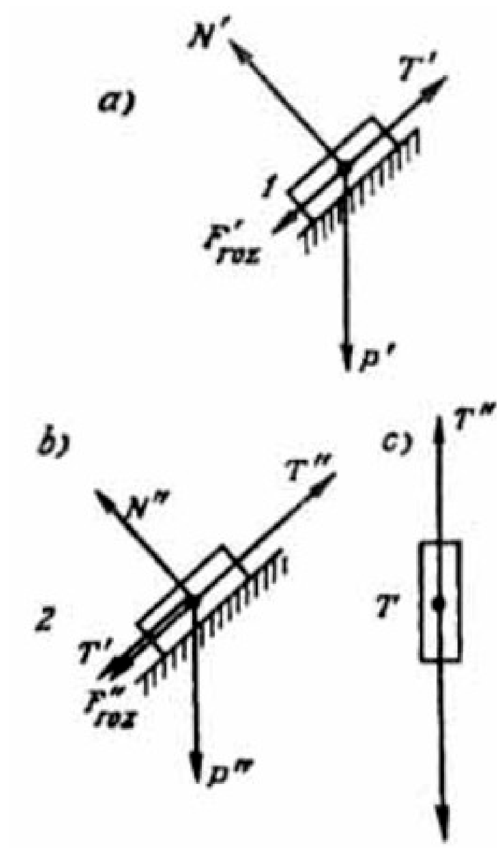


Figura 13

PROFESOR: Perfectamente. Ahora analice el cuerpo 3.

ESTUDIANTE: El cuerpo 3 interacciona solamente con la Tierra y la cuerda CD. Las fuerzas aplicadas a dicho cuerpo, están indicadas en la figura 13, c.

PROFESOR: Después de encontrar las fuerzas aplicadas a cada uno de los cuerpos, usted' debe escribir las ecuaciones del movimiento para cada uno de ellos y luego resolver el sistema de ecuaciones que obtenga.

ESTUDIANTE: Usted ha indicado que se puede analizar también un conjunto de cuerpos.

PROFESOR: Sí, a los cuerpos 1, 2 y 3 se les puede también considerar en conjunto, como un solo sistema. En este caso no hay que prestar atención a las tensiones de las cuerdas, puesto que ahora, éstas se consideran Fuerzas internas, es decir, son fuerzas de interacción entre diferentes partes del objeto analizado. El sistema de tres cuerpos en conjunto interacciona solamente con la Tierra y con el plano inclinado.

ESTUDIANTE: Hay un punto que yo quisiera aclarar mejor. Cuando representé las fuerzas en tas figuras 13 b y 13 c, yo supuse que la tensión de la cuerda CD es la misma a ambos lados de la polea. ¿Esto es correcto?

PROFESOR: Rigurosamente hablando, no es correcto. Si la polea gira en el sentido de las agujas del reloj. entonces. la tensión del trozo de la cuerda CD, que sostiene al cuerpo 3, debe ser mayor que la tensión del trozo de la cuerda CD, que sostiene al cuerpo 2. La diferencia entre las tensiones, es decir, la resultante de ellas origina la aceleración de rotación de la polea. Sin embargo, en el ejemplo estudiado se supone que la masa de la polea es despreciable, es decir, no tiene masa la cual sea necesario impulsar. La polea se considera simplemente como un medio para hacer cambiar la dirección de la cuerda que enlaza los cuerpos 2 y 3. Por esta razón se puede decir que la tensión de la cuerda CD es la misma en ambos lados de la polea. Como regla general la masa de la polea se desprecia. En caso contrario, es necesario indicarlo.

¿Aún le quedan algunas dudas?

ESTUDIANTE: Si. tengo una pregunta más con relación al punto de aplicación de las fuerzas. En todas sus gráficas, usted ha aplicado las fuerzas en un solo punto del cuerpo. ¿Es correcto esto? ¿Se podría, por ejemplo, aplicar la fuerza de rozamiento en el centro de gravedad del cuerpo?

PROFESOR: No hay que olvidar que nosotros no estudiamos la cinemática y la dinámica de cuerpos extensos, sino de puntos materiales, es decir, suponemos que el cuerpo es una masa puntual. En las gráficas se representan cuerpos y no puntos, simplemente para mayor claridad. Por esto, todas las fuerzas, a las cuales está sometido un cuerpo se pueden considerar aplicadas a un punto.

ESTUDIANTE: Nos han enseñado que toda simplificación trae consigo la pérdida de ciertos aspectos del problema considerado. Precisamente, ¿qué perdemos al considerar un cuerpo como un punto material?

PROFESOR: En una simplificación de esta naturaleza, no tenemos en cuenta los momentos de giro, los cuales en condiciones reales pueden llegar a provocar un vuelco al hacer que el cuerpo gire. El movimiento de un punto material puede ser únicamente de traslación. Veamos un ejemplo: supongamos que sobre un cuerpo actúan dos fuerzas en puntos diferentes: F_1 en el punto A y F_2 en B, como lo indica la figura 14 a. Apliquemos sobre el punto A una fuerza F'_2; igual a F_2 y paralela a ésta, lo mismo que la fuerza F''_2; igual a F_2, pero en sentido contrario (ver figura 14 b).

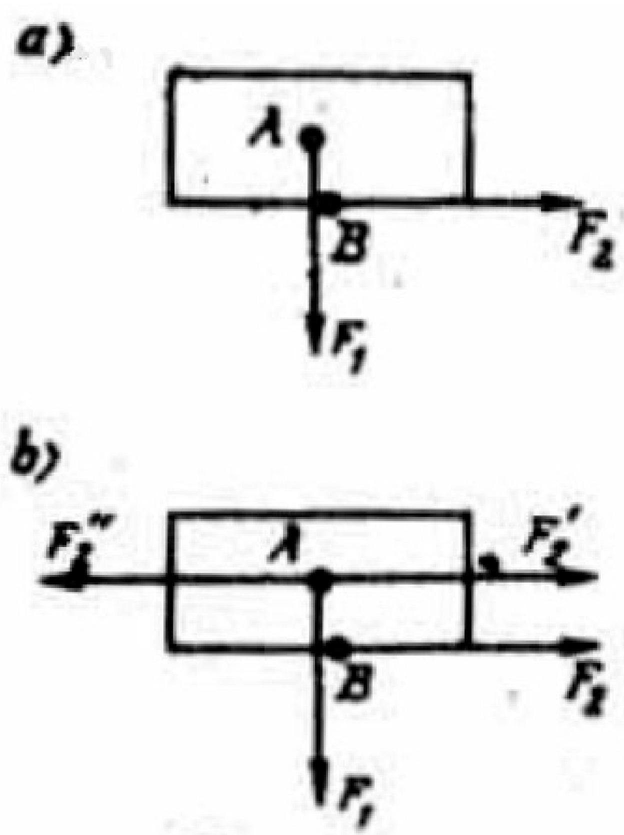


Figura 14

Como las fuerzas F'_2; y F''_2, se anulan entre sí, su introducción no causa ninguna alteración física. Sin embargo, la figura 14, b se puede tratar de la siguiente manera: sobre el punto A están aplicadas las fuerzas F_1 y F'_2 que pueden conducir a un desplazamiento del cuerpo. Además sobre el mismo cuerpo actúan un par de fuerzas (las fuerzas F_2 y F''_2) que hacen que el objeto gire. En otras palabras, a la fuerza F, se la puede trasladar al punto A, siempre y cuando al mismo tiempo agreguemos el momento de giro correspondiente.

ESTUDIANTE: Usted dice que un punto material no puede girar, sino que puede trasladarse. Pero antes hemos analizado el movimiento a lo largo de una circunferencia.

PROFESOR: No confunda dos cosas diferentes: El movimiento de traslación de un punto puede realizarse siguiendo diferentes trayectorias, en particular, a lo largo de una circunferencia, Al decir que no existe el movimiento de rotación de un punto, quiero dar a entender que un punto no puede rotar, es decir, girar alrededor de sí mismo o de un eje que pase por ese punto.

§ 3. ¿SABE USTED CALCULAR LA FUERZA DE ROZAMIENTO?

PROFESOR: Quisiera detenerme un poco más detalladamente en el cálculo de la fuerza de fricción en diferentes problemas. Se trata de la fricción de deslizamiento en seco (fricción en seco se denomina al rozamiento entre las superficies de contacto de dos cuerpos en ausencia de cualquier clase de lubricación. por ejemplo, grasa).

ESTUDIANTE: Pero aquí todo parece claro.

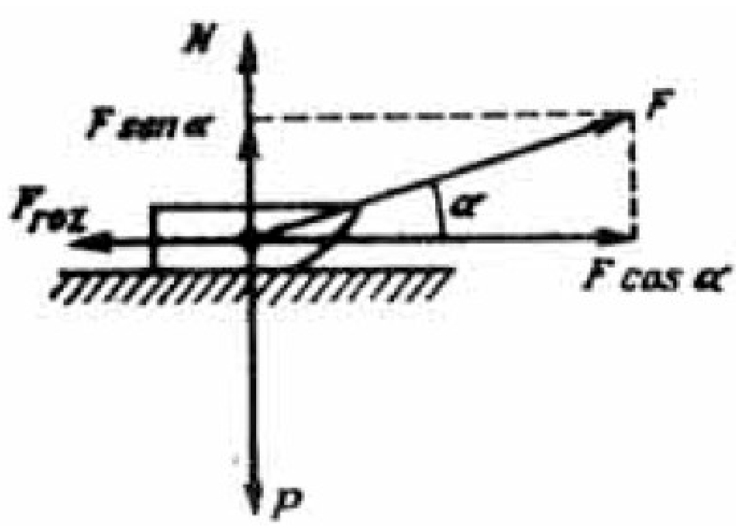


Figura 15

PROFESOR: No obstante, una gran cantidad de errores en los exámenes está relacionada con el cálculo incorrecto de la fuerza de fricción. Veamos el ejemplo indicado en la figura 15. *Un trineo cuyo peso es P es tirado por una fuerza F aplicada a una cuerda, la cual forma con la horizontal un ángulo α; el coeficiente de* *rozamiento es igual a k. Se pide encontrar la fuerza de fricción de deslizamiento.* ¿Cómo resolverla usted este problema?

ESTUDIANTE: Esto no me parece difícil. La fuerza de rozamiento es igual a kP.

PROFESOR: Falso. La fuerza de fricción de deslizamiento, no es igual a kP, sino a kN, donde N es la fuerza normal o fuerza de reacción del apoyo. Recuerde la expresión (5) del §2.

ESTUDIANTE: ¿No es acaso lo mismo?

PROFESOR: En un caso particular el peso y la fuerza normal pueden ser iguales, pero en general son fuerzas completamente diferentes. Analicemos el problema que he propuesto. Las fuerzas aplicadas al objeto en este ejemplo son: su peso P, la reacción N. la fuerza de fricción F_r. y la tensión de la cuerda F (ver figura 15). Descompongamos la fuerza F en sus componentes, vertical (F sen α) y horizontal (F cos α). Todas las fuerzas que actúan en dirección perpendicular, se anulan mutuamente. A partir de esta condición encontramos la fuerza normal

$$N = P — F \text{ sen } \alpha \qquad (6)$$

Usted ve, que esta fuerza no es igual al peso del trineo, sino menor en sen α. En el sentido de la Física esto es totalmente natural, ya que cuando la cuerda se tensa hacia arriba tiende a levantar el trineo. Debido a esto, la fuerza, con la cual el trineo hace presión sobre el suelo, disminuye y por lo tanto la reacción normal se hará también menor. Es decir, en este caso tendremos que

$$F_r = k\,(P — F \text{ sen } \alpha) \qquad (7)$$

En particular, si la cuerda permanece horizontal entonces, en lugar de (6) tendremos N = P. de donde se concluye que F_r = kP.

ESTUDIANTE: Ya entiendo. Sencillamente, nunca habla pensado en esto lo suficiente.

PROFESOR: Este es un error muy frecuente en los exámenes. El estudiante trata de identificar a la fuerza de fricción con el producto del coeficiente de fricción por el peso, y no por la reacción del apoyo o Fuerza normal (kN). Trate usted de no cometer el mismo error.

ESTUDIANTE: Yo utilizaré la siguiente regla: para encontrar la fuerza Fricción, es necesario determinar primero la fuerza normal.

PROFESOR: Hasta ahora, hemos hablada de la fuerza de Fricción cinética. Ahora hablaremos de la fuerza de fricción estática. Aquí hay algo específico que no toman en cuenta los estudiantes. Consideremos el siguiente ejemplo. Un cuerpo se encuentra en reposo sobre un plano horizontal, al mismo tiempo que una fuerza horizontal F actúa sobre dicho cuerpo y tiende a desplazarlo. Pregunta: ¿Cómo encontraría usted la fuerza de fricción en este caso?

ESTUDIANTE: Si el objeto se encuentra sobre un plano horizontal y la fuerza F es también horizontal, entonces N = P. ¿Correcto?

PROFESOR: Correcto. ¿Y qué haría usted luego?

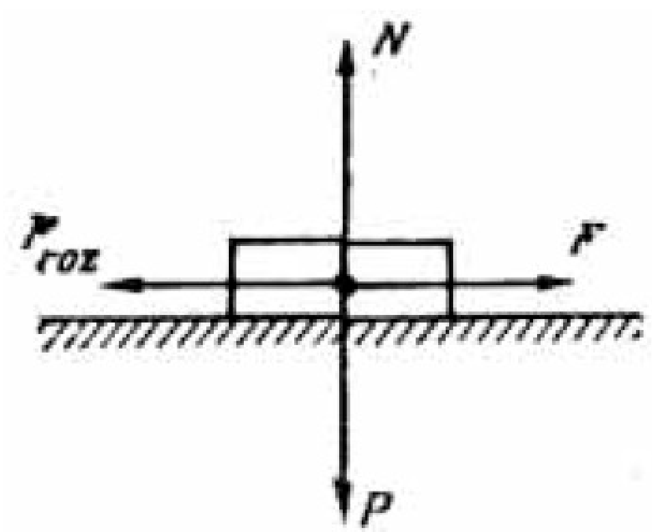


Figura 16

ESTUDIANTE: De esto yo concluyo que la fuerza de Fricción es igual a kP.

PROFESOR: Usted ha cometido un error típico: confundió la fuerza de fricción estática con la fuerza de Fricción cinética.

Si el cuerpo deslizara, entonces su respuesta seria correcta; sin embargo, en el caso dado, el cuerpo se encuentra en reposo.

Para que un objeto permanezca en reposo, es necesario, que todas las fuerzas aplicadas sobre éste se anulen mutuamente. Sobre el cuerpo considerado actúan cuatro fuerzas: su peso P, la fuerza normal N, la Fuerza F y la fuerza de fricción F, (figura 16).

Las fuerzas verticales P y N se compensan mutuamente y por lo tanto, las fuerzas horizontales F y F_r. deben anularse entre sí, Es decir,

$$F_r = F \qquad (8)$$

ESTUDIANTE: ¿Resulta entonces, que la fuerza de fricción estática depende de la fuerza externa que tiende a desplazar al cuerpo?

PROFESOR: Así es. A medida que la fuerza F aumenta, la Fuerza de fricción estática también crece; sin embargo, ésta no aumenta ilimitadamente. Existe un valor máximo de la fuerza de fricción estática

$$F_{max} = k_0N \qquad (9)$$

El coeficiente k_0 es un poco mayor que el coeficiente k, que caracteriza según (5) a la fuerza de fricción cinética. Tan pronto la fuerza exterior F alcance el valor k_0N, el cuerpo empezará a moverse. En estas condiciones el coeficiente k_0, se hace igual al coeficiente k, de tal manera que la fuerza de fricción disminuye un poco. Si F continúa aumentando, la fuerza de fricción (que ahora es la Fuerza de Fricción cinética) no aumenta más (hasta valores muy grandes de la velocidad), y el cuerpo se moverá con una aceleración que aumenta paulatinamente. El hecho de que al presentar los exámenes muchos de los alumnos no sepan determinar la fuerza de fricción, se puede apreciar por las respuestas a esta sencilla pregunta: ¿a qué es igual la Fuerza de Fricción, cuando un cuerpo P se encuentra en reposo sobre un plano inclinado con un ángulo de inclinación α? Se pueden oír diferentes respuestas falsas. Algunos responden, que la fuerza de fricción es igual a kP, otros que es igual a

$$kN = kP\cos\alpha$$

ESTUDIANTE: Yo entiendo. Puesto que el cuerpo está en reposo se trata entonces de la fuerza de fricción estática. Esta debe determinarse a partir de las condiciones de equilibrio de las fuerzas que actúan en la dirección paralela al plano inclinado. En este caso, estas fuerzas son dos: la de fricción F_r y la fuerza que obliga a deslizar al cuerpo P sen α. Por esta razón, la respuesta correcta es F_r = P sen α.

PROFESOR: Exactamente. Para concluir analicemos el siguiente problema representado en la figura 17. *Un bloque cuya masa es m, descansa sobre otro de masa M; el valor máximo de la fuerza de rozamiento estático entre los dos bloques está representado por el coeficiente k_0, se desprecia la fricción entre el bloque M y la superficie de la Tierra.* Se pide encontrar la fuerza F mínima que debe aplicarse sobre M para que el bloque de arriba empiece a deslizar sobre el primero.

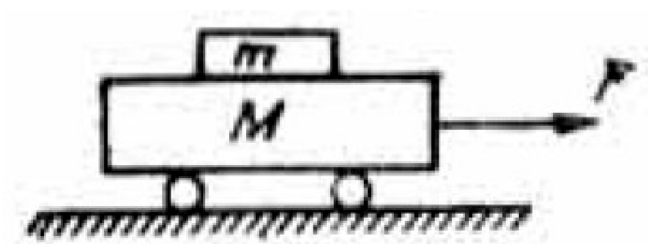


Figura 17

ESTUDIANTE: Primero, supondré que la fuerza F es suficientemente pequeña: el cuerpo m no se desplaza con relación a M. En este caso los dos cuerpos tienen la aceleración

$$a = F / (M + m)$$

PROFESOR: Correcto. ¿Cuál es la fuerza que le comunica esta aceleración al cuerpo m?

ESTUDIANTE: La fuerza de fricción estática

$$F_r = ma = F_r m / (M + m).$$

De aquí se concluye, que al crecer la fuerza F, la fuerza de fricción estática F_r también debe aumentar. Sin embargo, ésta no puede aumentar infinitamente. Su valor máximo es

$$F_{r\ máx} = k_0N = k_0mg$$

Por consiguiente, el valor máximo de F_r mediante el cual los dos cuerpos se mueven todavía juntos como un sistema único, se determina a partir de la condición

$$k_0\ mg = Fm\ /\ (M + m)$$

de donde encontramos

$$F = (M + m)\ k_0g$$

Esta será la fuerza mínima que buscamos, y que es la que produce el corrimiento del cuerpo m con relación a M.

PROFESOR: La solución que usted le da al problema considerado es correcta. Su razonamiento me satisface plenamente.

§4. ¿CONOCE USTED BIEN LAS LEYES DE NEWTON?

PROFESOR: Enuncie, por favor, la primera ley de Newton.

ESTUDIANTE: Un cuerpo permanecerá en estado de reposo o se moverá con movimiento rectilíneo y uniforme, mientras la acción de otros cuerpos no le obligue a cambiar de estado.

PROFESOR: ¿Esta ley se cumple para cualquier sistema de referencia?

ESTUDIANTE: No entiendo su pregunta.

PROFESOR: Si usted dice, que el cuerpo se encuentra en estado de reposo, quiere decir, que éste permanece inmóvil con relación a otro cuerpo, el cual, en dado caso, desempeña el papel de sistema de referencia. No tiene sentido hablar del reposo o del movimiento de un cuerpo, si no se indica el sistema de referencia El carácter del movimiento de un cuerpo depende del sistema de coordenadas que se escoja. Por ejemplo, un cuerpo que descansa sobre el piso de un vagón en movimiento permanece en reposo con relación a un sistema de coordenadas fijo en el vagón, pero se mueve con relación a un sistema de coordenadas tomado en la vía. Después de estas explicaciones regresemos a la pregunta formulada: ¿La primera ley de Newton vale para todo sistema de referencia?

ESTUDIANTE: Posiblemente para todos...

PROFESOR: Veo que esta pregunta le cogió de sorpresa. Experimentalmente se demuestra, que la primera ley de Newton no se cumple para todo sistema de referencia. Consideremos el ejemplo del cuerpo que descansa sobre el piso del vagón, despreciando la fricción entre el cuerpo y el piso. Para esto, analizaremos la posición del cuerpo con relación a un sistema de referencia que permanece fijo en el vagón. En estas condiciones podernos observar lo siguiente: el cuerpo está quieto sobre el piso del vagón, pero luego no obstante la ausencia de acciones externas, empieza a deslizarse sobre el piso. Aquí tiene usted un ejemplo claro en donde no se cumple la primera ley de Newton. Este efecto lo podemos explicar así: el vagón que antes se movía uniformemente y en línea recta, ha empezado a frenar y el cuerpo, debido a que la fricción desaparece, continúa conservando su estado de movimiento uniforme y rectilíneo con relación a la vía. De aquí se concluye que en el sistema de coordenadas relacionado con la vía, se cumple la ley de Newton, mientras que no se cumple en el sistema de referencia fijo en el vagón, que ha empezado a detenerse. Los sistemas de referencia en los cuales se cumple la primera ley de Newton, reciben el nombre de inerciales. y en los que no, sistemas no inerciales. Para la mayoría de los fenómenos que analizaremos, podemos considerar como inercial a todo sistema de referencia fijo sobre la superficie de la Tierra o sobre cuerpos, que permanecen inmóviles o bien se mueven rectilínea y uniformemente con relación a la superficie terrestre. A los sistemas no inerciales pertenece todo sistema de coordenadas que se mueve con cierta aceleración, por ejemplo, todo sistema que rote, un ascensor, que bien se está deteniendo o bien se está acelerando, etc. Debemos hacer notar, que en los sistemas no inerciales no se cumplen ni la primera ni la segunda ley de Newton (ya que la primera ley es un caso particular de la segunda).

ESTUDIANTE: Pero si las leyes de Newton no se pueden utilizar en sistemas de referencia acelerados, entonces, ¿cómo se estudia la mecánica en tales sistemas?

PROFESOR: Las leyes de Newton se pueden utilizar en sistemas no inerciales de referencia, pero para esto, formalmente hay que aplicar sobre el cuerpo una fuerza complementaria, llamada fuerza de inercia, que es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración del sistema y dirigida en sentido contrario a la aceleración del cuerpo. Hay que subrayar, que en realidad, dicha fuerza no existe, pero si se introduce formalmente, entonces las leyes de Newton se cumplen en dicho sistema no inercial.

Sin embargo, quisiera aconsejarle que al resolver problemas utilice solamente sistemas inerciales de referencia. De esta manera todas las fuerzas con las cuales se encuentre, existirán realmente.

ESTUDIANTE: ¿Pero si nos limitamos solamente a los sistemas inerciales, entonces no se puede analizar un problema de un cuerpo que descansa sobre una plataforma que gira?

PROFESOR: ¿Por qué no? La elección del sistema de referencia depende de usted. Si usted utiliza en el problema dado el sistema de referencia relacionado con la plataforma (es decir, el sistema no inercial, entonces el cuerpo se considera en reposo. En cambio, si usted utiliza el sistema de referencia relacionado con la Tierra (es decir, el sistema inercial). entonces el movimiento del cuerpo se estudia como un movimiento circular. Yo le aconsejo que escoja precisamente un sistema inercial de referencia.

Y ahora le ruego que formule la segunda ley de Newton.

ESTUDIANTE: Esta ley se enuncia así: F = ma, en donde F es la fuerza que actúa sobre el cuerpo, m, su masa, y a, la aceleración.

PROFESOR: Su respuesta lacónica es muy común. En cuanto a su formulación hay que hacer tres observaciones: una esencial y dos no muy esenciales. En primer lugar, la fuerza no es consecuencia de la aceleración sino, lo contrario, la aceleración es un resultado de la fuerza. Por esto la formulación lógica de esta ley se escribe así:

$$a = BF / m \qquad (10)$$

donde B es el factor de proporcionalidad que depende de las unidades en que se miden las magnitudes que figuran en la fórmula (10). Quiero hacer notar que en su formulación usted no habló del factor de proporcionalidad B.

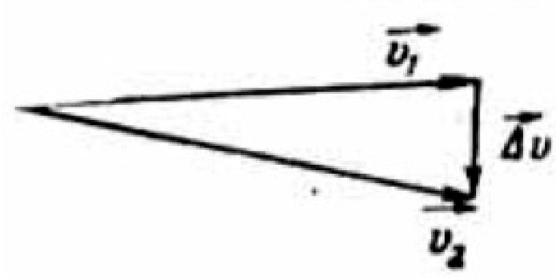
En segundo lugar, al cuerpo le comunican aceleración todas las fuerzas aplicadas a él (aunque no se excluye que algunas de ellas se anulan mutuamente). Por eso al formular esta ley es mejor, en lugar del término «fuerza», utilizar un término más preciso «la resultante de las fuerzas». La tercera observación es la más importante. La segunda ley de Newton establece la relación entre la fuerza y la aceleración. Pero la fuerza y la aceleración son magnitudes vectoriales que le caracterizan no solamente por su valor numérico sino también por su dirección. En su formulación usted no dice nada sobre la dirección. Esto es una grave omisión. Resulta que usted formuló la ley de Newton en forma incompleta. La formulación correcta de la segunda ley de Newton es la siguiente: *la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la resultante de todas las fuerzas aplicadas a dicho cuerpo, e inversamente proporcional a la masa del cuerpo y dirigida a lo largo de la resultante de las fuerzas*. Analíticamente esta frase se puede expresar con la siguiente fórmula:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{BF}}{m} \qquad (11)$$

(las flechas sobre las letras sirven para indicar las magnitudes vectoriales).

ESTUDIANTE: Al analizar en el § 2 las fuerzas aplicadas a un cuerpo que es lanzado formando un ángulo con la horizontal, usted prometió mostrar que la dirección del movimiento del cuerpo no coincide necesariamente con la dirección de la fuerza aplicada al cuerpo. Para esto usted hizo referencia a la segunda ley de Newton.

PROFESOR: Si, ahora es conveniente detenernos en este problema. Recuerde qué es la aceleración: como es sabido, la que caracteriza a la variación de la velocidad en la unidad de tiempo.



En la figura 18 están representados los vectores de la velocidad del cuerpo $\overrightarrow{v_1}$, y $\overrightarrow{v_2}$, para dos instantes muy cercanos de tiempo t y t + ∆t. La variación de la velocidad en el tiempo ∆t es el vector $\Delta\overrightarrow{v_1}$. Por definición, la aceleración

$$\vec{a}(t) \approx \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (12)$$

o, en forma más rigurosa,

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right) \qquad (13)$$

De aquí resulta que el vector de la aceleración está dirigido a lo largo del vector ∆v. que representa la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño. En la figura 18 se ve, que los vectores de la velocidad y de la variación de la velocidad pueden tener direcciones completamente diferentes. Esto quiere decir, que en general los vectores de la aceleración y de la velocidad también pueden' estar orientados de manera diferente. ¿Se entiende esto?

ESTUDIANTE: Si, esto lo entiendo. Por ejemplo, en el movimiento circular de un cuerpo, su velocidad está dirigida tangencialmente a la circunferencia, mientras que la aceleración está dirigida radialmente y hacia el centro. (Me refiero a la aceleración centrípeta.)

PROFESOR: Su adecuado ejemplo sirve para aclarar la fórmula (11) y explicar que la dirección de la fuerza coincide, con la dirección de la aceleración y no con la de la velocidad, y que la magnitud de la fuerza está relacionada, precisamente con la magnitud de la aceleración y no con la velocidad: Por otra parte, el carácter del movimiento de un cuerpo en un instante dado se determina por la dirección y el valor de la velocidad en el instante dado del vector de la velocidad está siempre dirigido según la tangente a la trayectoria del cuerpo). Puesto que la aceleración y la velocidad son vectores diferentes, en el caso general la dirección de la fuerza y la dirección en que se mueve el cuerpo pueden no coincidir, por consiguiente y el carácter del movimiento del cuerpo en un instante dado no se define unívocamente por las fuerzas. que actúan sobre el cuerpo considerado en ese instante.

ESTUDIANTE: Esto en el caso general. ¿Pero se sobreentiende que puede ser que las direcciones de la fuerza y la velocidad coincidan?

PROFESOR: Por supuesto que es posible. Levante un cuerpo y déjelo caer libremente, es decir, sin imprimirle velocidad inicial. En este caso la dirección del movimiento coincidirá con la dirección de la fuerza de gravedad. Si usted le imprime al cuerpo, por ejemplo, una velocidad horizontal inicial, la dirección del movimiento del cuerpo no coincidirá con la dirección de la fuerza de gravedad: el cuerpo describirá una parábola. En ambos casos el cuerpo se mueve por la acción de una misma fuerza, que es su peso, pero el carácter del movimiento es diferente en cada uno de los casos. Un físico diría, que la diferencia se debe a las diferentes condiciones iniciales: en el instante inicial del movimiento el cuerpo en el primer caso no tenía velocidad. mientras que en el segundo caso poseía una determinada velocidad horizontal.

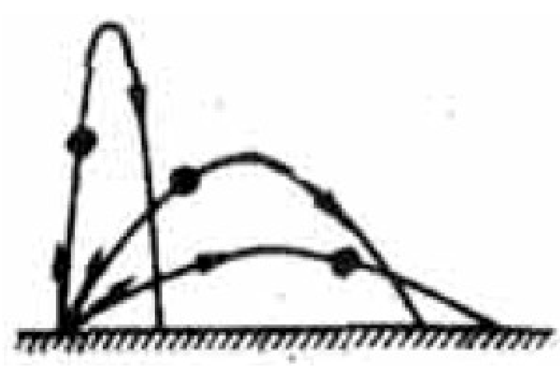


Figura 19

La figura 19 representa las diferentes trayectorias de los cuerpos. lanzados con velocidades iniciales en diferentes direcciones, pero en todos los casos sobre el cuerpo actúa una misma fuerza, o sea, el peso.

ESTUDIANTE: Esto quiere decir ¿que el carácter del movimiento del cuerpo en un instante dado no solamente se determina por las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo en ese momento, sino también por las condiciones iniciales?

PROFESOR: Completamente cierto. Hay cate subrayar, que las condiciones iniciales reflejan el comportamiento anterior del cuerpo. Ellas son el resultado de la acción de las fuerzas que antes actuaron. Tales fuerzas ya no existen, pero el resultado de su acción persiste. Desde el punto de vista filosófico, en esto se refleja la relación que existe entre el pasado y el presente, es decir, el principio de causalidad. Démonos cuenta que si en la fórmula de la segunda ley de Newton interviniese la velocidad en lugar de la aceleración, entonces, la relación indicada antes entre el pasado y el futuro no se manifestaría. En tal caso la velocidad del cuerpo en el instante dado (es decir, el carácter de su movimiento en un momento dado) se determinaría completamente por las fuerzas, que actúan sobre el cuerpo precisamente en dicho instante: el pasado no influiría de ninguna manera sobre el presente.

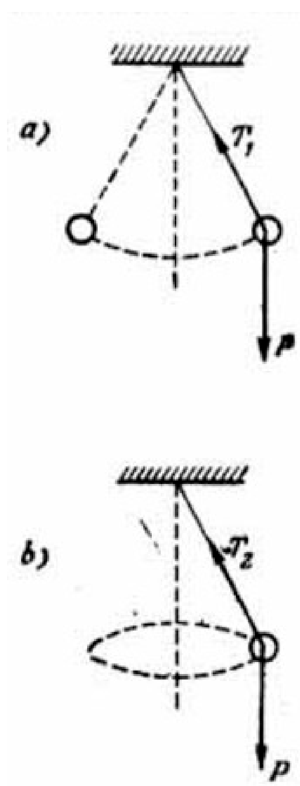


Figura 20

Quiero considerar un ejemplo más, que ilustre lo anteriormente dicho. Este está representado en la figura 20: sobre una bolita que pende de un hilo actúan dos fuerzas: el peso y la tensión del hilo. Si desviamos la bolita de su posición de equilibrio y luego la soltamos, comenzará a oscilar. Si le comunicáramos a la bolita desviada una determinada velocidad dirigida perpendicularmente al plano sobre el cual ocurrió la desviación, entonces la botita se movería uniformemente en una circunferencia. Como usted ve, según las condiciones iniciales la bolita o bien oscila (ver figura 20, a) o bien se mueve uniformemente en una circunferencia (ver figura 20, b), así pues, en los dos casos sobre la bolita actúan solamente dos fuerzas: su peso y la tensión del hilo.

ESTUDIANTE: Yo no pensé sobre las leyes de Newton en dicho plano.

PROFESOR: Por esto no es de asombrarse que al explicar la pregunta acerca de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, algunas veces parten del hecho del carácter del movimiento del cuerpo y no de cuáles son los cuerpos que interaccionan con el cuerpo dado. Recuerde que usted también obró así. Por esta razón, cuando usted dibujó las figuras 8, c y 8, d, a usted le pareció, que el conjunto de las fuerzas aplicadas al cuerpo en los casos indicados, debían ser diferentes, mientras que en ambos casos al cuerpo están aplicadas dos fuerzas: el peso y la tensión del hilo.

ESTUDIANTE: Ahora entiendo, un mismo conjunto de fuerzas aplicado a un cuerpo puede conducir a diferentes movimientos. Por lo tanto, los datos sobre el carácter del movimiento no pueden servir como punto de partida para deducir las fuerzas aplicadas a este cuerpo.

PROFESOR: Usted se ha expresado en forma exacta. Sin embargo, al hacer esta observación no hay que caer en los extremos. Aunque diferentes aspectos del movimiento se pueden llevar a cabo para las mismas combinaciones de las fuerzas (como en la figura 20), las relaciones numéricas entre las fuerzas que actúan en diferentes aspectos del movimiento son diferentes. Esto significa, que para diferentes aspectos del movimiento serán diferentes las resultantes de las fuerzas aplicadas. Así, por ejemplo, en el movimiento circular uniforme de un cuerpo, la resultante de las fuerzas debe ser la fuerza centrípeta, mientras que en las oscilaciones la resultante debe ser la fuerza restitutoria. De aquí se concluye, que los datos sobre el carácter del movimiento de un cuerpo no pueden servir como punto de partida para deducir las fuerzas. Claro que aquéllos de ninguna manera sobran.

A propósito, regresemos al ejemplo representado en la figura 20. Supongamos que se conocen el ángulo α entre la vertical y la dirección del hilo y el peso P del cuerpo; se pide encontrar la tensión T del hilo:

1) cuando el cuerpo que oscila llega a la posición extrema;
2) cuando el cuerpo se mueve uniformemente en una circunferencia.

En el primer caso la resultante es la fuerza restitutoria la cual está dirigida perpendicularmente al hilo.

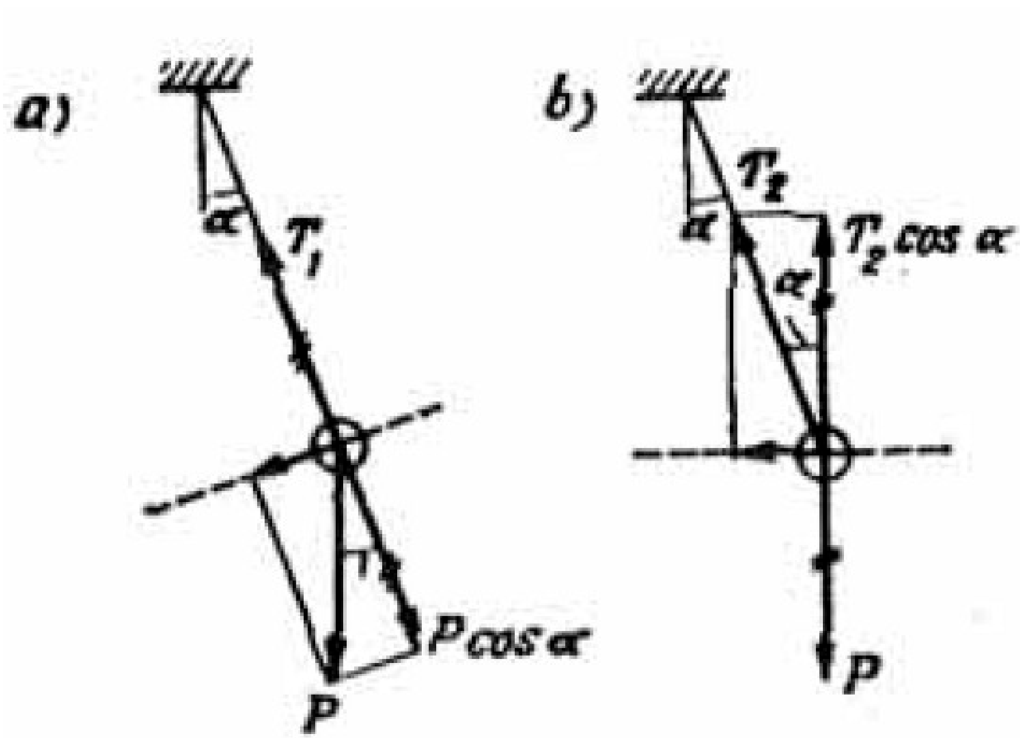


Figura 21

Por lo tanto, hay que descomponer el peso P del cuerpo en la dirección de la resultante y en la dirección perpendicular a éste (o sea, a lo largo del hilo) e igualar entre sí las fuerzas perpendiculares a la resultante, es decir, a las fuerzas que actúan en la dirección del hilo (figura 21, a). De aquí

$$T_1 = P \cos \alpha$$

En el segundo caso la resultante es la fuerza centrípeta, que está dirigida horizontalmente. Por lo tanto, es necesario descomponer la tensión T, del hilo en las direcciones horizontal y vertical e igualar entre si las tuerzas perpendiculares a la resultante, es decir, dirigidas verticalmente (figura 21, b) De ahí obtenemos

$$T_2 \cos \alpha = P \quad \text{ó}$$

$$T_2 = P / \cos \alpha$$

Como usted ve, el conocimiento del carácter del movimiento del cuerpo se utilizó al encontrar la tensión del hilo.

ESTUDIANTE: Si he entendido bien, conociendo la interacción de los cuerpos se pueden deducir las fuerzas que actúan sobre el cuerpo considerado y conociendo estas fuerzas y las condiciones iniciales se puede predecir el carácter del movimiento del cuerpo (la magnitud y dirección de la velocidad del cuerpo en cualquier instante de tiempo). Por otra parte, al conocer el carácter del movimiento del cuerpo, se puede establecer las relaciones entre las fuerzas aplicadas al cuerpo. ¿Estoy razonando correctamente?

PROFESOR: Sí, su razonamiento es correcto. Sigamos adelante. Quiero proponer un problema sencillo sobre la segunda ley de Newton. *Dos cuerpos de masas M y m, son levantados a igual altura del suelo y luego se sueltan al mismo tiempo. ¿Estos cuerpos caerán al suelo al mismo tiempo, si la resistencia del aire es la misma para ambos cuerpos?* Para mayor sencillez supondremos que dicha resistencia es constante.

ESTUDIANTE: Puesto que la resistencia del aire es igual para ambos cuerpos, se la puede despreciar. Por lo tanto, los dos caerán al mismo tiempo.

PROFESOR: Usted está equivocado. Usted no debe despreciar la resistencia del aíre. Veamos, por ejemplo, el cuerpo de masa M. Sobre éste actúan dos fuerzas: el peso Mg y la resistencia F. La resultante de estas fuerzas es (Mg—F). De aquí encontramos la aceleración:

$$a = (Mg - F) / M = g - F/M.$$

De esta manera, el cuerpo de mayor masa adquiere mayor aceleración y, por consiguiente, cae más rápido al suelo. Yo quisiera subrayar una vez más que, al calcular la aceleración de un cuerpo es necesario tener en cuenta todas las fuerzas aplicadas á éste, es decir, hay que encontrar la resultante de las fuerzas. A propósito es necesario aclarar el uso del término «fuerza de movimiento». Este término no es apropiado. Al emplearlo cuando nos referirnos a cierta fuerza (o a ciertas fuerzas), es como si nosotros recalcásemos el papel que desempeña esta fuerza (o estas fuerzas) en comunicarle una aceleración al cuerpo. Se puede creer que las otras fuerzas influyen menos. Esto es completamente falso. El movimiento de un cuerpo es el resultante de la acción de todas las fuerzas sin excepción, que actúan sobre el cuerpo (además, por supuesto, de las condiciones iniciales).

Estudiemos, por ejemplo, la tercera ley de Newton. Un caballo arrastra una carreta. Como resultado de esto el caballo y la carreta se mueven con cierta aceleración. De la tercera ley de Newton se sabe que según la fuerza con la cual el caballo tira la carreta, exactamente con esta misma fuerza, pero en sentido contrario actúa la carreta sobre el caballo. ¿Por qué entonces el caballo y la carreta se mueven de todas maneras con aceleración? Explíqueme esto.

ESTUDIANTE: Yo nunca pensé en este asunto, sin embargo, no veo aquí ninguna contradicción. La aceleración sería difícil de explicarla, si la fuerza con la cual el caballo actúa sobre la carreta, se compensara con la fuerza con la cual la carreta actúa sobre el caballo. Pero estas fuerzas no se puede compensar mutuamente, puesto que están aplicadas a diferentes cuerpos, una aplicada al caballo, y la otra a la carreta.

PROFESOR: Su explicación sirve para el caso cuando la carreta no está atada al caballo: el caballo se aparta de la carreta y como consecuencia de esto la carreta se mueve en un sentido y el caballo en otro. Yo le propuse a usted otro caso: el caballo y la carreta están unidos el uno al otro y éstos se mueven como un sistema único. Las fuerzas de interacción entre la carreta y el caballo citadas antes, están aplicadas a diferentes partes de un mismo sistema y al moverse este sistema en conjunto se puede considerar que estas fuerzas se equilibran mutuamente. De esta manera mi pregunta sigue en discusión.

ESTUDIANTE: Entonces no entiendo que sucede en este caso. ¿Tal vez aquí la acción no se compensa completamente con la reacción? No obstante, el caballo es un ser vivo

PROFESOR: No empiece a inventar. Tan pronto usted tropezó con una dificultad, empezó a interpretar mal una de las leyes fundamentales de la mecánica. Para responder a mi pregunta no es necesario revisar la tercera ley de Newton, al contrario, para nuestros razonamientos nos basaremos en esta ley.

De acuerdo con la tercera ley, la interacción entre el caballo y la carreta no puede producir el movimiento de este sistema como un todo (más precisamente: no puede comunicarle aceleración al sistema considerado en conjunto). En este caso es necesaria la existencia de una interacción complementaria. En otras palabras, además del caballo y de la carreta debe intervenir en el problema por lo menos un cuerpo más. En nuestro caso dicho cuerpo es la Tierra. En consecuencia, tenemos tres interacciones en lugar de una:

1) la del caballo con la carreta (llamemos esta fuerza f_0);
2) la del caballo con la Tierra (fuerza F), el caballo se apoya en la superficie de la Tierra;
3) la de la carreta con la Tierra (fuerza f), la fricción entre la carreta y la superficie de la Tierra.

En la figura 22 están representados tres cuerpos: el caballo, la carreta y la Tierra; sobre cada uno, de éstos están aplicadas dos fuerzas corno resultado de la interacción de uno de los cuerpos con los otro, dos.

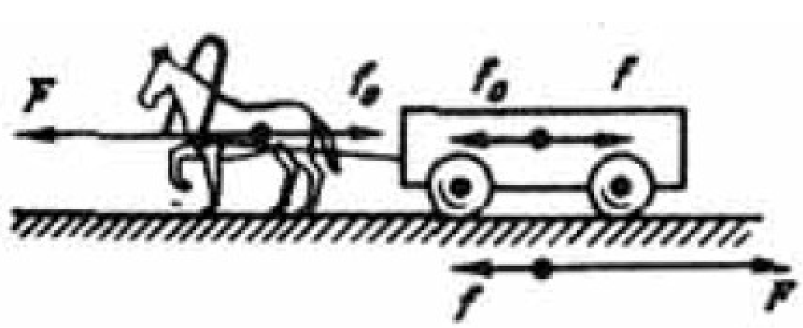


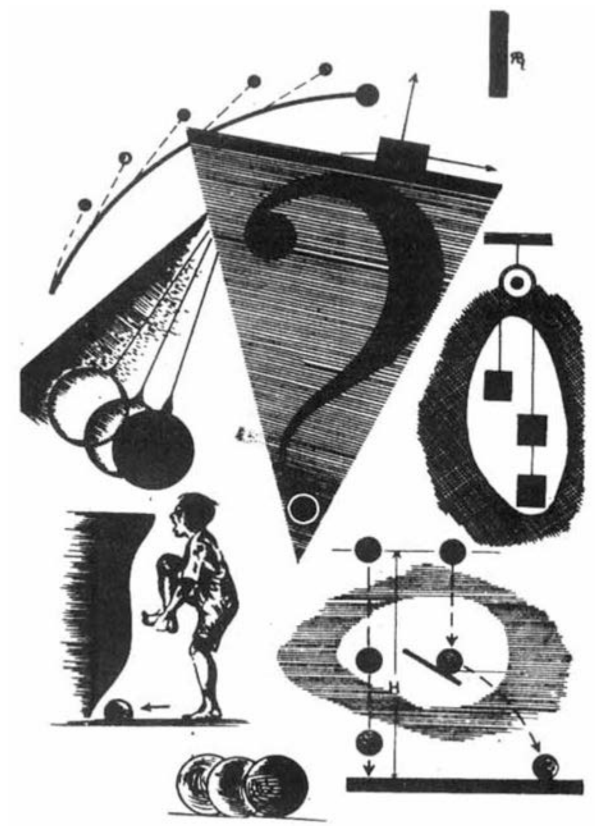
Figura 21

La aceleración del sistema caballo-carreta es producida por la resultante de todas las fuerzas aplicadas a este sistema. Estas fuerzas son cuatro y su resultante es igual a F — f. Esta es la que imprime la aceleración al sistema estudiado. Como usted ve, esta aceleración no está relacionada con la interacción de la carreta y el caballo.

ESTUDIANTE: Resulta entonces que la superficie de la Tierra no es simplemente el lugar en donde se lleva a cabo uno u otro acontecimiento, sino que también es un participante activo en los acontecimientos.

PROFESOR: Su observación metafórica es correcta. A propósito, coloque al caballo con la carreta sobre una pista ideal de hielo y de esta manera excluirá la interacción horizontal de este sistema con la Tierra y no habrá ningún movimiento. Hay que subrayar, sobre todo, que: *ninguna interacción interna puede comunicarle aceleración al sistema considerado como un todo, para esto es absolutamente necesaria la acción externa (uno mismo no puede levantarse por los cabellos)*.Esta es una conclusión práctica y muy importante de la tercera ley de Newton.

Capítulo 3



Si usted conoce bien la Mecánica resolverá fácilmente los problemas- Y viceversa: si usted resuelve fácilmente los problemas, usted sabe bien Mecánica. Por esta razón, resuelva el mayor número posible de problemas.

§5. ¿COMO RESUELVE USTED LOS PROBLEMAS DE LA CINEMÁTICA?

PROFESOR: Supongamos que dos cuerpos caen desde una cierta altura: uno de ellos cae libremente (sin velocidad inicial) y al otro se le comunica cierta velocidad inicial dirigida horizontalmente. Aquí y en lo sucesivo despreciaremos la resistencia que ofrece el aire. Compare los tiempos que emplean los cuerpos considerados durante su caída.

ESTUDIANTE: Para su análisis, el movimiento de un cuerpo lanzado horizontalmente se puede descomponer en dos movimientos: uno en la dirección vertical y otro en dirección horizontal. El tiempo de caída se obtiene a partir del movimiento vertical, puesto que el desplazamiento vertical de los cuerpos en ambos casos se determina de las mismas condiciones iniciales (la misma altura y además la componente vertical de la velocidad es nula), de ahí resulta, que el tiempo de caída para los dos cuerpos es el mismo e igual a √2H/g, donde H es la altura de la posición inicial.

PROFESOR: Exactamente. Ahora consideremos un caso más complicado. Supongamos, que ambos cuerpos caen desde una altura H sin velocidad inicial, pero uno de ellos durante su recorrido choca contra un plano inclinado fijo y colocado a una altura h y que tiene un ángulo de inclinación igual a 45°. Debido al choque de este cuerpo contra el plano inclinado, su velocidad torna la dirección horizontal (figura 23). Compare los tiempos de caída para estos dos cuerpos.

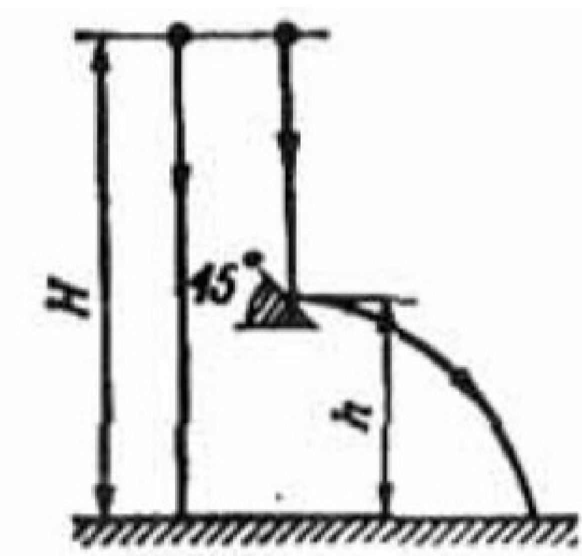


Figura 23

ESTUDIANTE: Hasta el nivel donde se encuentra el plano inclinado los dos cuerpos emplean el mismo tiempo. Como resultado del choque uno de los cuerpos adquiere cierta velocidad horizontal. Sin embargo, la componente horizontal de la velocidad no influye sobre el movimiento vertical del cuerpo. De ahí resulta que tanto aquí como en el caso anterior los tiempos de caída para ambos cuerpos deben ser iguales.

PROFESOR: Su respuesta no es correcta. Es cierto lo que usted dice que la componente horizontal de la velocidad no influye sobre el desplazamiento vertical del cuerpo y, por consiguiente, tampoco en el tiempo de carda. Sin embargo, el choque contra el plano no solamente conduce a que el cuerpo adquiera una componente horizontal de la velocidad, además desaparece la componente vertical y esto, por supuesto influirá en el tiempo de caída del cuerpo. Al chocar contra el plano el cuerpo pierde su velocidad vertical y cae desde la altura h sin velocidad vertical inicial. El plaño, por un instante, no permite el desplazamiento vertical del cuerpo y por lo tanto, demora su caída. El tiempo de caída del cuerpo que no choca contra el plano inclinado es igual a $\sqrt{2H/g}$: mientras que el cuerpo que experimenta el choque demora en caer un tiempo igual

$$\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}+\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

En relación con esto quiero formular la siguiente pregunta: ¿cuál debe ser la razón entre las alturas H y h para que el tiempo de caída del cuerpo sea el máximo posible? O, dicho en otras palabras, ¿a qué altura hay que colocar el plano inclinado, para que éste demore la caída del cuerpo en la forma más efectiva?

ESTUDIANTE: Es difícil para mí dar una respuesta exacta. Me parece que el valor de la razón h/H no debe estar cerca de uno, ni tampoco de cero, ya que al ser igual esta razón a uno o a cero es equivalente a la ausencia del plano. Por esto creo que el plano inclinado se debe colocar más o menos en el centro de la distancia entre la superficie de la Tierra y el punto en donde se inicia la caída.

PROFESOR: Su observación es justa y no es difícil obtener la respuesta precisa. Escribamos el tiempo de caída del cuerpo

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right) \quad donde\ x=h/H$$

Hay que encontrar el valor de x, para el cual la función t(x) alcanza su valor máximo. Elevemos al cuadrado el tiempo t

$$t^2 = \frac{2H}{g}\left(1 + 2\sqrt{(1-x)x}\right)$$

Si el tiempo es el máximo, lo será también el cuadrado de éste.

De esta última igualdad se ve que el valor t^2 es máximo cuando lo es el valor de la función y = (1 — x)x. En esta forma al problema considerado lo convertimos en la determinación del valor máximo del trinomio

$$y = -x^2 + x = -(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}$$

Este trinomio es máximo para x=½, es decir, que la altura h; debe ser dos veces menor que H.

El análisis de los métodos más comúnmente usados en la solución de los problemas de cinemática lo expondremos en el ejemplo de un cuerpo que es lanzado formando un cierto ángulo con la horizontal.

ESTUDIANTE: No comprendo muy bien esta clase de problemas.

PROFESOR: Empecemos por el planteamiento general del problema: *un cuerpo es lanzado con una velocidad inicial v_0 formando con la horizontal un ángulo α. Se pide encontrar el tiempo T, la altura máxima H y el alcance horizontal L del lanzamiento*.

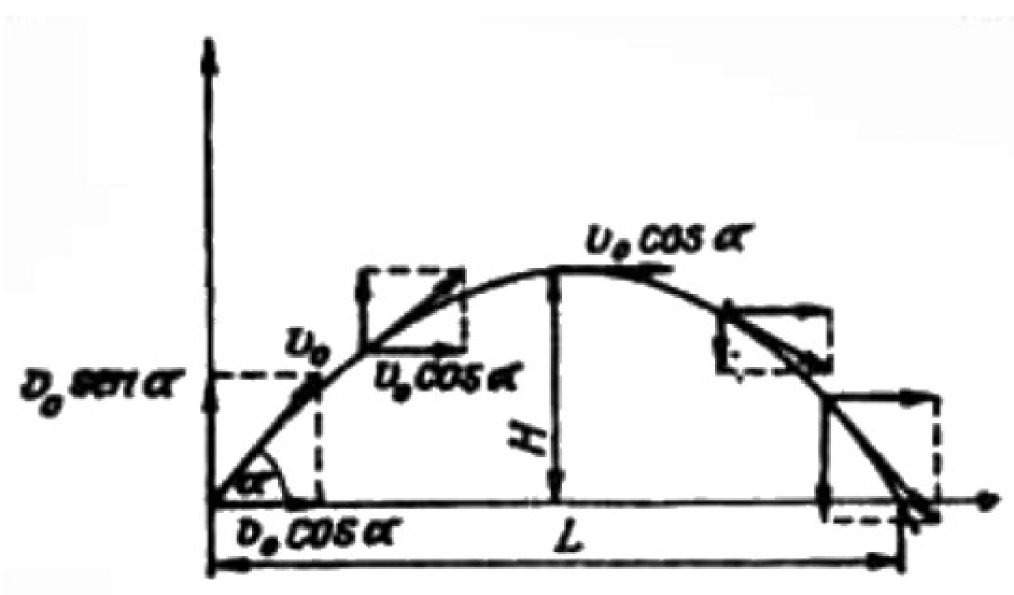


Figura 24

Como siempre empecemos por encontrar las fuerzas aplicadas al móvil. Sobre éste actúa solamente la fuerza de gravedad, por esta razón, en la dirección horizontal el cuerpo se mueve uniformemente mientras que en el eje vertical su movimiento es uniformemente acelerado con una aceleración igual a g. Analizaremos las componentes vertical y horizontal del movimiento por separado, para esto, descomponemos el vector de la velocidad inicial en su componente vertical (v_0 sen α) y horizontal (v_0 cos α). La componente horizontal de la velocidad permanece constante durante el lanzamiento, mientras que en la dirección vertical la velocidad varía como se indica en la figura 24. Empecemos por el análisis del movimiento vertical. El tiempo del lanzamiento es $T = T_1 + T_2$, donde T, representa el tiempo que demora el cuerpo en ascender (es decir, el tiempo que emplea, hasta alcanzarla altura máxima: durante este tiempo el movimiento del cuerpo es uniformemente retardado). T, es el tiempo que dura su descenso (ahora el movimiento vertical es uniformemente acelerado). La velocidad vertical del cuerpo en el punto más alto de su trayectoria (en el instante $t = T_1$) es evidentemente igual a cero. Por otra parte esta velocidad se puede expresar por medio de la fórmula de la velocidad en función del tiempo en el movimiento uniformemente retardado de donde obtenemos que

$$0 = v_0 \text{ sen } \alpha — gT_1$$

o,

$$T_1 = v_0 \text{ sen } \alpha \ / \ g \qquad (14)$$

Conociendo T_1. Hallamos

$$H = v_0 \text{ sen } \alpha \ T_1 — gT_1^2 \ / \ 2 = v_0^2 \text{sen}^2 \alpha / 2g \qquad (15)$$

El tiempo del descenso T_2 sé puede calcular, considerando la caída del cuerpo desde una altura H y sin velocidad vertical inicial (calda libre):

$$T_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

Comparando este resultado con (14) vemos que el tiempo empleado en el descenso es igual al tiempo del ascenso. El tiempo total del lanzamiento es

$$T = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \qquad (16)$$

Para encontrar el alcance L del lanzamiento, es necesario utilizar. la componente horizontal del movimiento del cuerpo. Como ya lo hemos dicho antes, en la dirección horizontal el cuerpo se mueve uniformemente. De ahí encontramos

$$L = v_0 \cos \alpha \; T = v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha \;/\; g \qquad (17)$$

De (17) se ve que si los ángulos del lanzamiento de das cuerpos suman 90° y si son iguales los valores de sus velocidades iniciales, los dos cuerpos caerán en un mismo punto. ¿Está todo claro en este problema?

ESTUDIANTE: Si, está todo claro.

PROFESOR: En ese caso, compliquemos un poco el problema. *Supongamos que el viento actúa favorablemente sobre el cuerpo durante su recorrido con una fuerza F horizontal constante. El peso del cuerpo es igual a P. Se pide, como en el caso anterior, encontrar el tiempo T del lanzamiento, la altura H y el alcance L.*

ESTUDIANTE: Este problema se diferencia del anterior en que el desplazamiento del cuerpo a lo largo del eje horizontal no es uniforme: en esta dirección el cuerpo se mueve con una aceleración a = (F / P) g.

PROFESOR: ¿Varía en algo el movimiento del cuerpo a lo largo del eje vertical?

ESTUDIANTE: Puesto que el viento actúa horizontalmente, éste no debe influir en el desplazamiento vertical del móvil.

PROFESOR: Está bien. Ahora averigüe lo siguiente: ¿cuáles de las magnitudes que buscamos en el problema anterior se expresan de la misma manera?

ESTUDIANTE: Evidentemente que el tiempo T del lanzamiento y la altura máxima H, ya que esas magnitudes se determinan a partir del movimiento vertical y por lo tanto no cambiarán.

PROFESOR: Magnífico. Ahora le falta por determinar el alcance del lanzamiento.

ESTUDIANTE: Conociendo la aceleración horizontal y el tiempo del lanzamiento, encontramos el alcance

$$L = v_0 \cos \alpha T + \frac{aT^2}{2} = \left(\frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}\right) + 2\left(\frac{F}{P}\right)\left(\frac{v_0^2 sen^2\ 2\alpha}{g}\right)$$

PROFESOR: Está bien. Sólo que esta expresión se puede escribir de una manera más cómoda

$$L = \left(\frac{v_0^2 \operatorname{sen}\ 2\alpha}{g}\right)\left(1 + \left(\frac{F}{P}\right)\tan \alpha\right) \qquad (18)$$

Estudiemos un problema más: *un cuerpo es lanzado formando un ángulo α con un plano inclinado, el que a su vez forma con el eje horizontal un ángulo β (figura 25). La velocidad inicial del cuerpo es igual a v_0. Se pide encontrar la distancia L desde el punto del lanzamiento hasta el punto donde el cuerpo cae.*

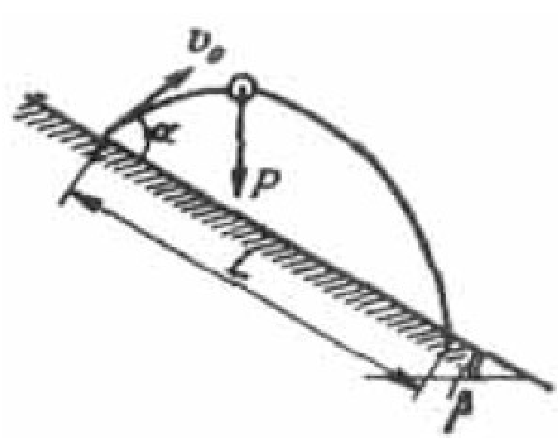


Figura 25

ESTUDIANTE: Yo he tratado de resolver problemas de este tipo sin ningún éxito.

PROFESOR: ¿No encuentra usted nada de común entre este problema y el anterior?

ESTUDIANTE: No. No encuentro.

PROFESOR: Giremos imaginariamente la gráfica de este problema un ángulo β, de tal manera que el plano inclinado nos quede en posición horizontal (figura 26, a).

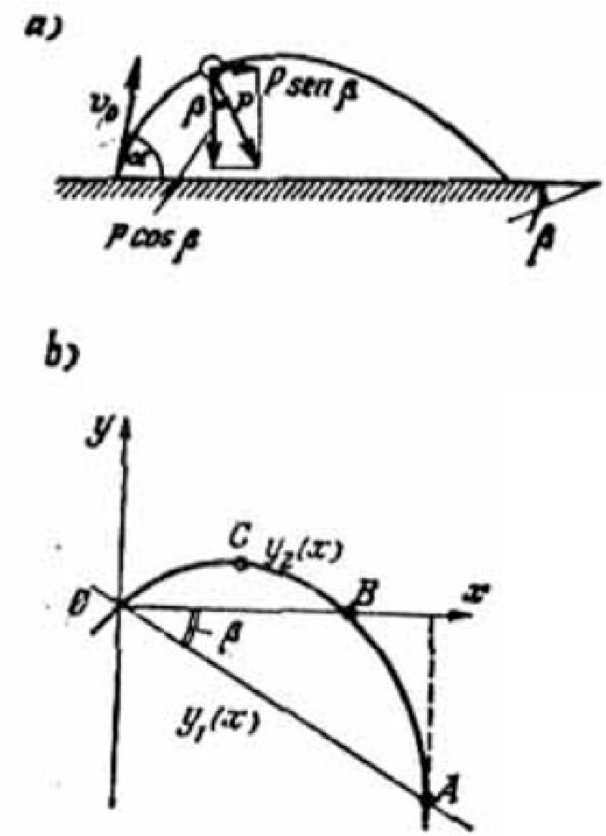


Figura 26

Después del giro la dirección de la fuerza gravitatoria ya no es el eje vertical. Descompongamos esta fuerza en sus componentes: vertical (P cos β) y horizontal (P sen β). Podemos ver fácilmente que hemos obtenido un problema del mismo tipo que el anterior, sólo que ahora la fuerza P sen β reemplaza a la acción del viento, mientras que el peso del cuerpo queda representado por la fuerza P cos β. Por lo tanto, para determinar la distancia L que buscamos, podemos utilizar la expresión (18) siempre y cuando hagamos los siguientes cambios:

$$F \to P \text{ sen } \beta,\ P \to P \cos \beta,\ g \to g \cos \beta$$

De esta manera encontramos que

$$L = \left(\frac{v_0^2 \text{ sen } 2\alpha}{g \cos \beta}\right)(1 + \tan \beta \tan \alpha) \qquad (19)$$

Cuando $\beta = 0$, este resultado coincide con la expresión (17). Sería interesante que indicáramos otro método para la solución de este problema. Escojamos el origen de los ejes de coordenadas Ox y Oy en el punto de lanzamiento del cuerpo (figura 26, b). El perfil del plano inclinado obedece en este sistema de coordenadas a la función lineal

$$y_1 = -\tan \beta x$$

y la trayectoria del móvil es una parábola cuya ecuación es

$$y_1 = ax^2 + bx$$

Los coeficientes a y b se expresan a través de las magnitudes v_0, α y β. Encontremos luego la abscisa del punto A, x_A, donde se cortan las gráficas de las funciones y_1 y y_2. Para esto igualamos las expresiones de estas funciones

$$-\tan \beta x = ax^2 + bx$$

De ahí obtenemos

$$x_A = (\tan \beta + b) / (-a)$$

Sabiendo x_A, hallamos la distancia que buscamos OA = L:

$$L = x_A / \cos\beta = (\tan\beta + b)/ (—\cos\beta) \qquad (20)$$

Nos queda solamente por expresar los coeficientes .a y b en función de v_0, α y β. Para esto es necesario utilizar los puntos B y C de la parábola (ver figura 26, b). Escribamos la ecuación de la parábola para cada uno de estos puntos

$$y_{2C} = ax^2_C + bx_C$$
$$y_{2B} = ax^2_B + bx_B$$

Las coordenadas de los puntos B y C nos son conocidas. Por consiguiente, el sistema de ecuaciones que hemos escrito nos permite determinar los coeficientes a y b. Le propongo que en su tiempo libre usted mismo encuentre la respuesta y la lleve a la forma (19).

ESTUDIANTE: Me gustó más el primer método de solución.

PROFESOR: Eso va en gustos. Los dos métodos indicados son por su carácter esencialmente diferentes, al primero lo podemos llamar «físico» porque utiliza un modelo característico de la Física (nosotros hemos cambiado un tanto nuestro punto de vista y reducimos nuestro problema al problema con el viento que analizamos anteriormente), mientras que al segundo lo podemos llamar «matemático» (o analítico). En este último se utilizaron dos funciones para encontrar los puntos donde sus gráficas se interceptan. En mi concepto el primer método es más elegante que el segundo, pero en cambio, es menos general. Es decir, el segundo se puede emplear más ampliamente. Por ejemplo, éste es especialmente útil, cuando el perfil de la montaña de donde se lanza un cuerpo no es una línea recta. En tal caso en lugar de la función lineal y, se utilizará otra que corresponda mejor al perfil de la montaña. El primer método, en un caso semejante, en principio no es apropiado. En relación con esto recordemos, que los métodos matemáticos tienen un campo de aplicación más amplio debido a que son más abstractos.

PROBLEMAS

1. Un cuerpo A es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s. ¿A qué altura se encontraría un cuerpo B que fue lanzado horizontalmente con una velocidad igual a 4 m/s y al mismo tiempo que el cuerpo A y que luego choca con este último durante el vuelo? La distancia horizontal entre las posiciones iniciales de los cuerpos es igual a 4 m. Encontrar también el tiempo empleado hasta el instante del choque y la velocidad de cada uno de los cuerpos en este instante.

2. Dos cuerpos son lanzados al mismo tiempo y al encuentro desde los puntos A y B que se encuentran a una altura de 2 metros y 6 metros, respectivamente. Uno de los cuerpos es lanzado horizontalmente con una velocidad de 8 m/s y el otro hacia abajo formando un ángulo de 45° con la horizontal y con una velocidad inicial tal que ambos cuerpos choquen durante el vuelo. La distancia horizontal entre los puntos A y B es igual a 8 m. Calcular la velocidad inicial v_0 del cuerpo lanzado bajo un ángulo de 45°, las coordenadas x e y del punto donde chocan, el tiempo t que tardan los cuerpos hasta el choque y las velocidades v_A y v_C de ambos cuerpos en el instante en que chocan. Las trayectorias de los cuerpos descansan sobre el mismo plano.

3. Desde un punto son lanzados dos cuerpos formando ángulos α_1 y α_2 con la horizontal y con velocidades iniciales v_1 y v_2 respectivamente. ¿A qué distancia entre si se encontrarán los cuerpos después de un tiempo t? Para mayor sencillez supondremos que: $t< (t \text{ sen } \alpha)_{min} /g$, donde $(v \text{ sen } \alpha)_{min}$ es el producto mínimo entre v_1 sen α_1 y v_2 sen α_2. Analizar dos casos. Primero: las trayectorias de los cuerpos descansan sobre un mismo plano y los cuerpos son lanzados en diferentes sentidos; segundo: las trayectorias de los cuerpos descansan sobre planos perpendiculares entre sí.

4. Un cuerpo cae desde una altura H sin velocidad inicial. A una altura h, éste choca elásticamente contra un plano colocado formando un ángulo de 30° con la horizontal. Encontrar el tiempo de caída del cuerpo.

5. ¿Bajo qué ángulo con la horizontal debe ser lanzado un cuerpo cuyo peso es P para que la altura máxima a que se eleva sea igual al alcance del lanzamiento? Suponer que sobre el cuerpo actúa horizontalmente el viento con una fuerza constante F.

6. Desde un plano inclinado en ángulo α es lanzada una piedra con una velocidad inicial v_0 y perpendicularmente al plano. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cae esta piedra?

7. Un muchacho de 1,5 m de estatura y que está parado a una distancia de 15 m frente a una cerca de 5 m de altura, lanza una piedra bajo un ángulo de 45° con la horizontal. ¿Con qué velocidad mínima debe lanzar la piedra para que ésta pase por encima de la cerca?

§6. ¿COMO RESUELVE USTED LOS PROBLEMAS DE DINÁMICA?

PROFESOR: Al resolver los problemas de dinámica es muy. importante deducir correctamente las fuerzas aplicadas a un cuerpo (ver §2).

ESTUDIANTE: Quiero hacerle una pregunta al respecto. Supongamos que yo he deducido correctamente todas las fuerzas aplicadas al cuerpo considerado. ¿Qué debo hacer después de esto?

PROFESOR: Si las fuerzas no están dirigidas a lo largo de una misma recta hay que descomponerlas en sus dos componentes según los ejes vertical y horizontal y luego analizar estas componentes por separado para cada uno de los ejes. Ahora mismo quisiera darle algunos consejos prácticos al respecto. Como primera medida, para no confundirse al descomponer las fuerzas, debe representar a éstas en el diagrama en forma bien clara. Generalmente en los diagramas el estudiante suele representar a las fuerzas por medio de. flechas tan pequeñas que dificultan su análisis. Compare, por ejemplo, su dibujo (figura 8) con el mío (figura 9). Como segunda medida, no se debe descomponer las fuerzas antes de haber deducido, sin excepción, todas las fuerzas aplicadas al cuerpo y haberlas representado en un diagrama. Sólo después de esto puede usted proceder a la descomposición de las fuerzas. Como tercera medida, una vez que usted haya descompuesto una fuerza debe trabajar únicamente con sus componentes: o bien la fuerza, o bien sus componentes.

ESTUDIANTE: ¿En base a qué principio debemos escoger los ejes de los componentes?

PROFESOR: Al escoger las direcciones de las componentes, es decir, los ejes sobre los cuales vamos a descomponer las fuerzas, hay que prestar atención al carácter del movimiento del cuerpo. Son posibles dos variantes:

1) el cuerpo está en reposo o se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo;
2) el cuerpo se mueve con una aceleración, cuya dirección es conocida (por lo menos con error del signo).

En el primer caso usted puede escoger los ejes arbitrariamente, según el sistema en el cual resulte más cómoda la solución.

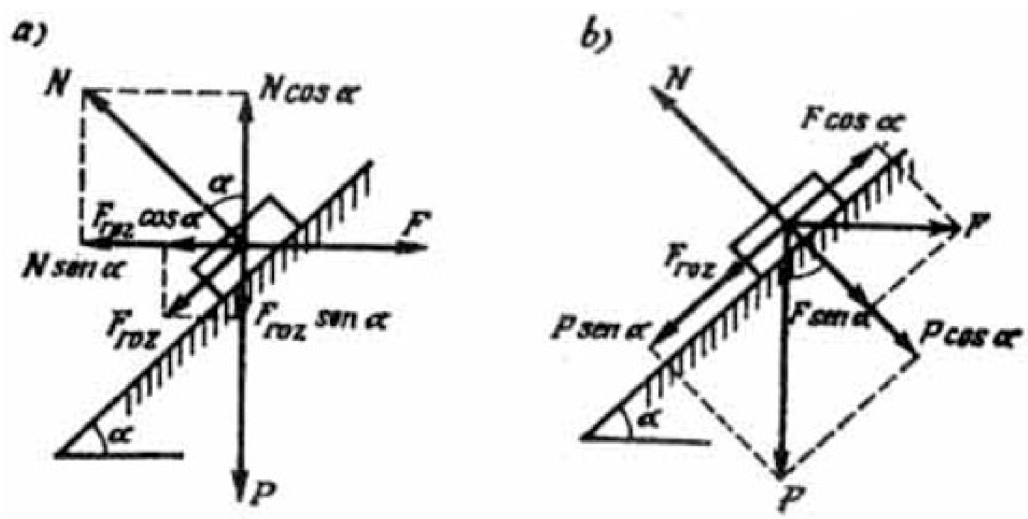


Figura 27

Por ejemplo, en el problema indicado en la figura 10, el cuerpo se desplaza uniformemente hacia arriba por un plano inclinado. En este caso la elección de los ejes a lo largo de los cuales descomponemos las fuerzas es indiferente; se pueden escoger o bien los ejes horizontal y vertical (figura 27, a) o bien las direcciones paralela y perpendicular al plano inclinado (figura 27, b).

Una vez que hayamos terminado la descomposición de las fuerzas, hay que igualar a cero la suma algebraica de las componentes de éstas sobre cada uno de los ejes (no olvidar que por ahora se trata del movimiento no acelerado de un cuerpo). En el ejemplo representado en la figura 27, a obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$N \cos \alpha - F_r \operatorname{sen} \alpha - P = 0 \qquad (21)$$
$$F - F_r \cos \alpha - N \operatorname{sen} \alpha = 0$$

En el caso indicado en la figura 27, b el siguiente sistema de ecuaciones:

$$N - P \cos \alpha - F \operatorname{sen} \alpha = 0 \qquad (22)$$
$$F_r + P \operatorname{sen} \alpha - F \cos \alpha = 0$$

ESTUDIANTE: Estos dos sistemas de ecuaciones son diferentes.

PROFESOR: No obstante, las soluciones de estos dos sistemas nos dan un mismo resultado. Esto es fácil comprobar. Supongamos que en problema se pide encontrar la fuerza F, que hace subir al cuerpo con velocidad constante a lo largo del plano inclinado. Reemplazando en (21) la relación (5),
obtenemos:

$$N (\cos \alpha - k \operatorname{sen} \alpha) - P = 0$$
$$F - N (k \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) = 0$$

De la primera ecuación de este sistema encontramos que

$$N = P / (\cos \alpha - k \operatorname{sen} \alpha)^{-1}.$$

Reemplazando este resultado en la segunda ecuación, obtenemos la respuesta:

$$F = P \frac{k \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - k \operatorname{sen} \alpha}$$

Exactamente la misma respuesta se obtiene a partir del sistema (22). Usted mismo puede fácilmente comprobarlo.

ESTUDIANTE: ¿Y cómo hacer cuando el movimiento del cuerpo es acelerado?

PROFESOR: En este caso, debemos escoger los ejes de acuerdo a la dirección de la aceleración del cuerpo (la dirección de la fuerza resultante). Es decir, descomponemos las fuerzas en la dirección de la aceleración y perpendicularmente a ésta. Entonces, la suma algebraica de las componentes de las fuerzas en la dirección perpendicular a la aceleración, se iguala a cero, mientras que a lo largo de la aceleración, de acuerdo a la segunda ley de Newton, la suma algebraica de las componentes es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración.

Resolvamos el último ejemplo de un bloque sobre un plano inclinado, suponiendo ahora que el cuerpo se mueve hacia arriba con cierta aceleración. De acuerdo con las observaciones anteriores hay que descomponer las fuerzas, de la misma manera que en el caso representado en la Figura 27, b. Así pues, en lugar de (22), tendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$N - P \cos \alpha - F \operatorname{sen} \alpha = 0 \qquad (23)$$

$$F \cos \alpha - F_r + P \operatorname{sen} \alpha = ma = P(a/g)$$

Utilizando la expresión (5), determinamos la aceleración del cuerpo

$$a = g(F \cos \alpha - (P \cos \alpha + F \operatorname{sen} \alpha)k - P \operatorname{sen} \alpha)/P$$

ESTUDIANTE: Cuando el movimiento es acelerado, ¿se puede descomponer las fuerzas en dos ejes que no sean las direcciones paralela y normal a la dirección de la aceleración? Según he entendido de sus explicaciones parece que esto no se puede hacer.

PROFESOR: Después de su pregunta veo que debo precisar mejor mis explicaciones. Cuando el movimiento es acelerado usted puede descomponer las fuerzas en dos direcciones cualesquiera perpendiculares entre sí. Sólo que entonces usted debe descomponer, además de las fuerzas, el vector de la aceleración. Es decir, de esta manera usted hace más difícil la solución. Para evitar complicaciones, es mejor obrar como le he aconsejado. Esta es la forma más sencilla. En el problema siempre se sabe la dirección de la aceleración del cuerpo (por lo menos con precisión del signo) y usted puede utilizar este dato. El hecho de no saber escoger de la manera más conveniente los ejes de las componentes de las fuerzas, es una de las causas de confusión de los examinandos al resolver problemas de dinámica más o menos difíciles.

ESTUDIANTE: Hemos hablado de descomposición en dos direcciones, pero seguramente. en general, hay que hablar de las componentes en tres ejes perpendiculares entre sí, teniendo en cuenta que el espacio es tridimensional.

PROFESOR: Absolutamente cierto. Hemos supuesto sólo dos ejes direccionales, porque hemos tratado problemas en el plano (problemas en dos dimensiones). Hay que utilizar tres direcciones, pero en este caso todas las observaciones que hemos hecho antes, conservan su valor, aunque debo anotar que en los exámenes, se prefieren los problemas en dos dimensiones. Por supuesto que no excluimos la posibilidad de generalizar con algunos problemas relativamente fáciles en el espacio de tres dimensiones.

PROBLEMAS

8. Un cuerpo de 5 kg de masa, se mueve sobre un plano horizontal por acción de una fuerza de 3 kgf. que se aplica al cuerpo formando un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de rozamiento es igual a 0,2. Calcular la velocidad del cuerpo después de diez segundos de haber sido aplicada la fuerza y el trabajo de la fuerza de fricción durante este tiempo.

9. Un hombre tira dos trineos enlazados entre sí, de una cuerda que forma un ángulo de 45° con la horizontal y a la cual aplica una fuerza de 12 kgf (figura 28).

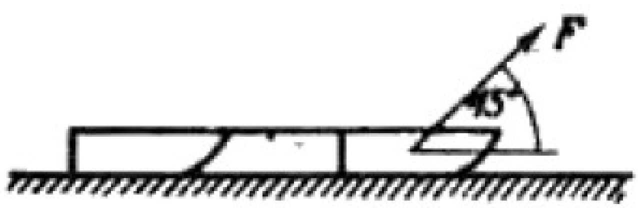
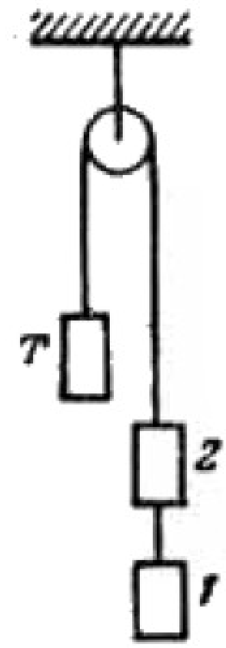


Figura 28

Las masas de los trineos son iguales a $m_1 = m_2 = 15$ kg. El coeficiente de rozamiento de los patines con la nieve es igual a 0,02. Encontrar:

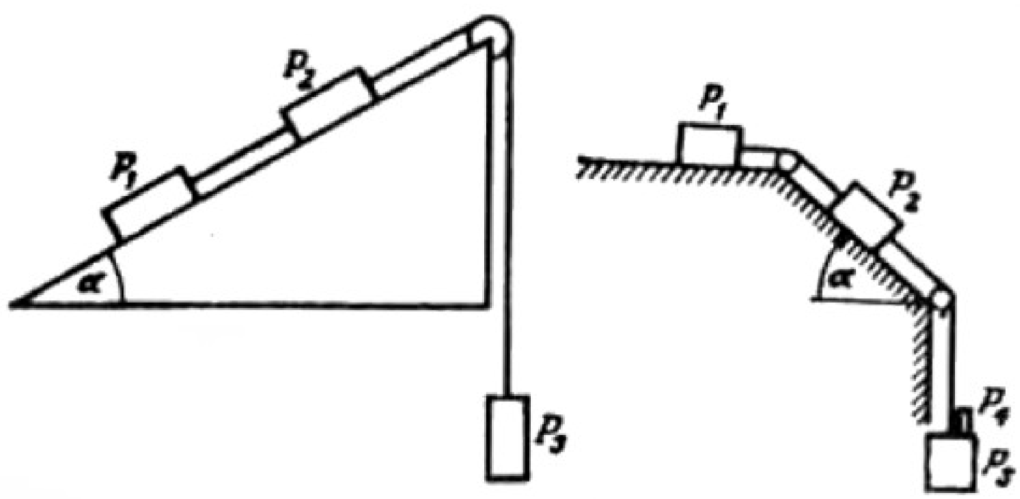
1. la aceleración de los trineos y la tensión de la cuerda que los mantiene unidos;
2. la fuerza con la cual el hombre debe halar de la cuerda para que los trineos se muevan uniformemente.



10. A través de una polea que permanece inmóvil, pasa una cuerda de la cual están suspendidas tres cargas iguales, cada uno de 2 kg de masa (figura 29).

Encontrar la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda que une a los bloques 1 y 2.

11. Calcular la aceleración de las cargas y las tensiones de las cuerdas en el caso representado en la figura 30. Los datos conocidos son: $\alpha = 30°$, $P_1 = 4$ kgf, $P_2 = 2$ kgf, $P_3 = 8$ kgf. Se desprecia la fricción con el plano.



Figuras 30 y 31

12. En el sistema de cargas representado en la figura 31 $P_1 = 1$ kgf; $P_2 = 2$ kgf; $P_3 = 5$ kgf; $P_4 = 0,5$ kgf; $\alpha = 30°$. El coeficiente de rozamiento de las cargas con el

plano es igual a 0,2. Encontrar la aceleración del sistema de cargas, las tensiones de las cuerdas y la fuerza con la cual el bloque P, hace presión sobre P_3.

§ 7. ¿EN QUE MEDIDA LA FUERZA DE FRICCIÓN COMPLICA LAS SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DE DINÁMICA?.

PROFESOR: La fuerza de fricción puede complicar bastante un problema.

ESTUDIANTE: Pero nosotros ya hemos estudiado la fuerza de fricción (ver §3). Si el cuerpo se mueve, la fuerza de fricción se determina por la reacción normal ($F_r = kN$): si el cuerpo está en reposo, la fuerza de fricción es igual en magnitud a la fuerza que trata de sacar al cuerpo de su estado de reposo. Esto no es difícil de entender y recordar.

PROFESOR: Así es. Sin embargo, usted no toma en cuenta un hecho muy importante. Usted supone que de antemano puede responder a las siguientes preguntas:

1) ¿El cuerpo está en reposo o en movimiento?
2) ¿En qué sentido se mueve el cuerpo?

Sí esto se sabe con anterioridad, entonces en realidad lo demás es relativamente fácil. Sin embargo, si no es así, el problema se complica y es necesario hacer un análisis especial.

ESTUDIANTE: Si, ahora recuerdo. Nosotros ya hemos tratado de esto en el § 2, cuando hablábamos de cómo escoger la dirección de la fuerza de fricción.

PROFESOR: Ahora quiero detenerme más detalladamente en esta pregunta. Me parece que tanto los estudiantes como algunos de los profesores encargados de formular los problemas no analizan qué dificultades representa un problema de dinámica en el cual se tiene en cuenta la fuerza de fricción. Estudiemos el ejemplo representado en la figura 10 en donde se conoce: el ángulo de inclinación α, el peso P del cuerpo, la fuerza F y el coeficiente cinético de fricción k. Para mayor sencillez vamos a suponer que $k_0 = k$ (donde k_0, es el valor máximo del coeficiente de fricción estático). Se pide hacer un análisis del movimiento del cuerpo y encontrar la aceleración. Suponemos que el cuerpo se mueve hacia arriba a lo largo del plano inclinado. Descomponemos todas las fuerzas de la manera indicada en la figura 27, b. Utilizamos el resultado que obtuvimos para la aceleración en el § 6:

$$a = g(F \cos \alpha - P \operatorname{sen} \alpha - (P \cos \alpha + F \operatorname{sen} \alpha)k)/P \qquad (24)$$

De (24) concluimos que para que el cuerpo se mueva hacia arriba por el plano inclinado es necesario que se cumpla la siguiente condición

$$F \cos \alpha - P \operatorname{sen} \alpha - (P \cos \alpha + F \operatorname{sen} \alpha)\, k \geq 0$$

Escribamos esta condición en la forma

$$F \geq P(k \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) \,/\, (\cos \alpha - k \operatorname{sen} \alpha) \qquad (25)$$

Suponiendo, que el ángulo de inclinación del plano no es demasiado grande, de tal manera que $(1 - k \tan \alpha) > 0$, o sea que

$$\tan \alpha < Pk \qquad (26)$$

Luego suponemos que el cuerpo se mueve hacia abajo a lo largo del plano inclinado. Descomponemos las fuerzas de acuerdo con el diagrama de la figura 27, b, pero ahora dirigimos la fuerza de fricción en el sentido contrario. Como resultado de esto obtenemos para la aceleración del cuerpo la siguiente expresión:

$$a = g(P \operatorname{sen} \alpha - F \cos \alpha - (P \cos \alpha + F \operatorname{sen} \alpha)k)/P \qquad (27)$$

De (27) concluimos, que para que el cuerpo se mueva hacia abajo, es necesario que se cumpla la condición

$$P \operatorname{sen} \alpha - F \cos \alpha - (P \cos \alpha + F \operatorname{sen} \alpha)\, k \geq 0$$

escrito en otra forma

$$F \leq P(\text{sen}\ \alpha - k \cos \alpha) / (\cos \alpha + k\ \text{sen}\ \alpha)$$

$$F \leq P(\tan \alpha - k) / (1 + k \tan \alpha) \qquad (28)$$

Para esto suponemos, que el ángulo de inclinación del plano inclinado no es demasiado pequeño, de manera que $(\tan \alpha - k) > 0$, 0 sea,

$$\tan \alpha > k. \qquad (29)$$

A partir de las condiciones (25), (26), (28), (29), podemos concluir lo siguiente:

1. Si para el plano inclinado se cumple la condición

$$k < \tan \alpha < 1/k$$

entonces:

a) si $F > P (k + \tan \alpha)/(1 - k \tan \alpha)$, el cuerpo se mueve hacia arriba con una aceleración que se determina por la fórmula (24):
b) si $F = P (k + \tan \alpha)/(1 - k \tan \alpha)$ el cuerpo se mueve hacia arriba uniformemente o permanece en reposo;
c) si $F < P (\tan \alpha - k)/(1 - k \tan \alpha)$, el cuerpo se mueve hacia abajo con una aceleración que se determina por la fórmula (27);
d) si $F = P (\tan \alpha - k)/(1 + k \tan \alpha)$, el cuerpo permanece en reposo o se mueve hacia abajo con movimiento uniforme;
e) si $P (\tan \alpha - k) / (1 + k \tan \alpha) < F < P(k + \tan \alpha)/(1 - k \tan \alpha)$, el cuerpo permanece en reposo.

Notemos que cuando la fuerza F crece desde el valor $P (\tan \alpha - k)/(1 + k \tan \alpha)$ hasta el valor $P (k + \tan \alpha) / (1 - k \tan \alpha)$ la fuerza de fricción estática disminuye paulatinamente desde el valor $k(P \cos \alpha + F\ \text{sen}\ \alpha)$ hasta cero y luego cambia de sentido y crece desde cero hasta el valor k(P cos α + F sen α). Durante el tiempo que dure este proceso, el cuerpo permanece en reposo.

2. Cuando en el plano inclinado se cumple la condición

$$0 < \tan \alpha \leq k,$$

entonces:

a. si F > P (k + tan α)/(1—k tan α), el cuerpo se mueve hacia arriba con una aceleración cuyo valor se calcula a partir de la fórmula (24);
b. si F = P (k + tan α)/(1 — k tan α), permanece en reposo o se mueve hacia arriba con una velocidad constante;
c. si F<P (tan α + k)/(1—k tan α), el bloque permanece en reposo; el movimiento del cuerpo hacia abajo, a lo largo del plano inclinado en estas condiciones es imposible (inclusive cuando F se hace igual a cero).

3. Si se cumple la condición

$$\tan \alpha > 1 / k,$$

entonces:

a. si, F<P (tan α —k)/(1 + k tan α) el cuerpo se mueve hacia abajo con una aceleración, que podemos calcular con ayuda de la fórmula (27);
b. si F = P (k + tan α)/(1 — k tan α), el cuerpo permanece en reposo o se mueve hacia abajo uniformemente;
c. si F > P (tan α —k)/(1 + k tan α), el cuerpo no se mueve; el movimiento del cuerpo hacia arriba por el plano inclinado es imposible. A primera vista esto parece contradictorio ya que la fuerza F la podemos aumentar indefinidamente. Sin embargo, la pendiente del plano inclinado es tan grande, que al aumentar F, presionamos más el cuerpo contra la superficie del plano inclinado.

ESTUDIANTE: A nosotros nunca se nos hizo una demostración de este tipo.

PROFESOR: Precisamente por esto, yo quería concentrar "su atención en este problema. Por supuesto, que en el examen usted seguramente tropezará con problemas menos difíciles, en donde o bien se desprecia la fuerza de fricción, o bien se tiene en cuenta pero se conoce con anticipación el carácter del movimiento del cuerpo (por ejemplo, se sabe si el cuerpo está en reposo o se mueve). De todos modos aunque no se presenten estas dificultades, es conveniente saber que existen.

ESTUDIANTE: ¿Y qué sucederá, si en su análisis consideramos el caso cuando k = 0?

PROFESOR: Cuando la fricción no se tiene en cuenta, el problema se modifica bastante. En este caso, para cualquier ángulo de inclinación del plano tendremos que: cuando F > P tan α el cuerpo se mueve hacia arriba con una aceleración

$$a = g\,(F \cos \alpha - P \operatorname{sen} \alpha) / P \qquad (30)$$

si F = P tan α el cuerpo se mueve uniformemente (hacia arriba o hacia abajo) o permanece en reposo

si F < P tan α el cuerpo se desliza hacia abajo con una aceleración

$$a = g\,(P \operatorname{sen} \alpha - F \cos \alpha) / P. \qquad (31)$$

Debemos hacer notar que los resultados (30) y (31) coinciden con la exactitud del signo. Por esto al resolver un problema se puede suponer que el cuerpo se mueve en uno u otro sentido, encontrar la aceleración a y luego fijarse en su signo. Si $a>0$ el cuerpo se mueve en la dirección elegida si $a<0$, el cuerpo se mueve en sentido contrario (en este caso el valor de la aceleración es igual a tal).

Estudiemos un problema más. *Dos cuerpos P_1 y P_2 están atados por una cuerda que pasa a través de una polea. El cuerpo P descansa sobre un plano inclinado, cuyo ángulo de inclinación es α, mientras que P_2 cuelga de la cuerda (figura 32). El coeficiente de rozamiento con el plano inclinado es igual a k. Se pide encontrar la aceleración de este sistema.*

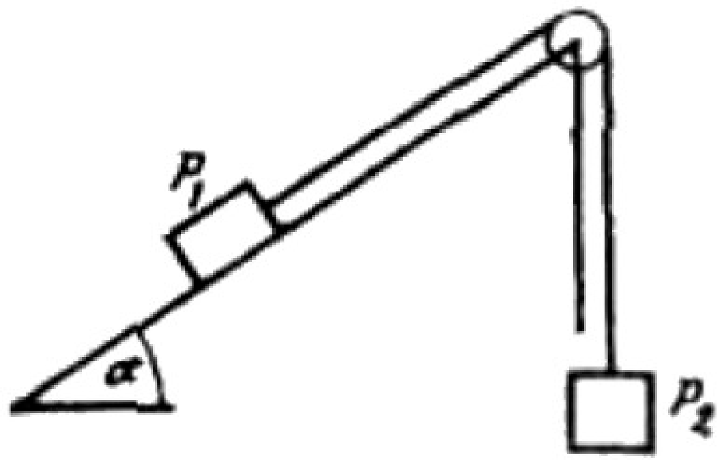


Figura 32

Supongamos que el sistema se mueve hacia la derecha. Analizando este problema como el movimiento de los cuerpos en conjunto, como un solo sistema, encontrarnos para la aceleración la siguiente expresión:

$$a = g\,(P_2 — P_1 \text{ sen } \alpha — P_1 k \cos \alpha) / (P_1 + P_2) \qquad (32)$$

En caso de que el sistema se mueva hacia la izquierda tendremos

$$a = g\,(P_1 \text{ sen } \alpha — P_2 — P_1 k \cos \alpha) / (P_1 + P_2) \qquad (33)$$

Hagamos el análisis para los valores dados α y k. Para esto, hacemos variar la razón $p = P_2 / P_1$. De la fórmula (32) se concluye, que para que el sistema se mueva de la izquierda hacia la derecha es necesario que se cumpla la condición

$$p \le (\text{sen } \alpha + k \cos \alpha)^{-1}$$

Basándonos en la fórmula (33) vemos que, para que el sistema se mueva de la derecha hacia la izquierda se debe cumplir que

$$p \ge (\text{sen } \alpha — k \cos \alpha)^{-1}$$

Para esto se necesita una condición complementaria que el ángulo de inclinación no sebe ser demasiado pequeño: tan α > k. Si por el contrario tan $\alpha \leq$ k, por más grande que sea la razón p, el sistema no se moverá de la derecha hacia la izquierda.

Si tan α > k, el sistema permanecerá en reposo, siempre y cuando se cumpla la desigualdad:

$$(\text{sen } \alpha + k \cos \alpha < p < (\text{sen } \alpha - k \cos \alpha)^{-1}$$

Si tan $\alpha \leq$ k, el sistema no se mueve si se cumple

$$p > (\text{sen } \alpha + k \cos \alpha)^{-1}$$

ESTUDIANTE: ¿Y qué sucede si variamos el ángulo α o el coeficiente k?

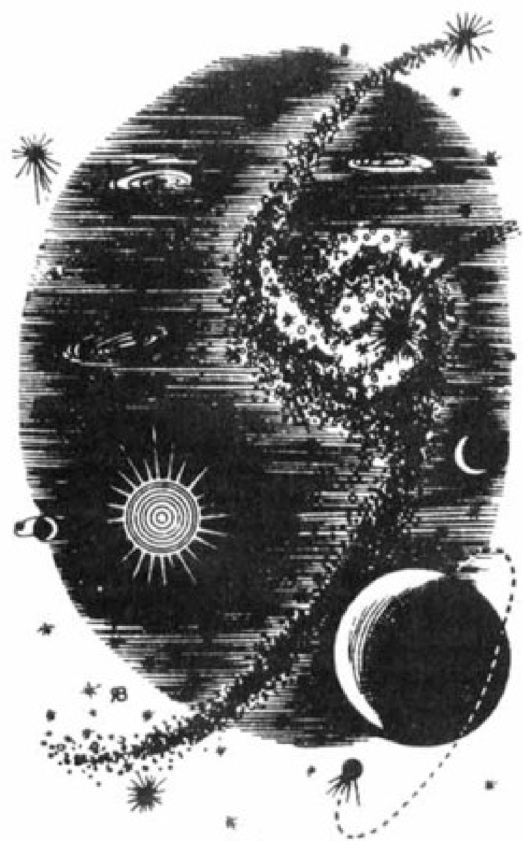
PROFESOR: Le sugiero que Ud, mismo haga el análisis desde este punto de vista (ver problemas N° 13 y N° 14)

PROBLEMAS

13. Haga un análisis del problema ilustrado en la figura 32, para diferentes valores del coeficiente k, suponiendo que se conocen el ángulo α y la razón $p = P_2/P_1$.

14. Para diferentes valores del ángulo de inclinación α, haga un análisis del problema ilustrado en la figura 32, suponiendo que se conocen el coeficiente de fricción k y la razón $p = P_2/P_1$. Para mayor sencillez considere sólo dos valores de esta razón: p = 1 (los cuerpos tienen igual peso) y p = ½, (el peso del cuerpo que descansa sobre el plano inclinado es dos veces mayor que el del cuerpo que pende de la cuerda).

Capítulo 4



El movimiento de un cuerpo que gira describiendo una circunferencia es el caso más simple de un movimiento curvilíneo. Por eso debemos con mayor razón conocer bien esta clase de movimiento. En el universo abundan los ejemplos de movimientos curvilíneos. Analicemos el movimiento uniforme y no uniforme de una partícula material que se mueve en una circunferencia, el movimiento de los satélites y en relación con esto investiguemos las causas físicas de la imponderabilidad de los cuerpos.

§ 8. ¿CÓMO ANALIZA USTED EL MOVIMIENTO CIRCULAR DE UN CUERPO?

PROFESOR: La experiencia ha demostrado que las preguntas y problemas relacionados con el movimiento de un cuerpo que gira en una circunferencia resultan bastante difíciles para el estudiante. En las respuestas a las preguntas de este tipo se comete una cantidad de faltas muy características. Para demostrar esto, invitemos a participar en nuestra discusión a un estudiante más, quien no está informado de todo lo que hasta ahora hemos hablado; condicionalmente lo llamaremos «estudiante B» (a mi interlocutor anterior lo llamaremos ahora «estudiante B»).

Al estudiante B le proponemos señalar las fuerzas que actúan sobre un satélite artificial, que gira alrededor de la Tierra. No se tienen en cuenta la resistencia de la atmósfera y la atracción de la Luna y el Sol y demás astros.

ESTUDIANTE B: Sobre el satélite actúan dos fuerzas: la atracción de la Tierra y la fuerza centrífuga.

PROFESOR: En cuanto a la atracción de la Tierra estoy de acuerdo con usted, pero no entiendo por qué aparece la fuerza centrífuga. Aclare eso, por favor.

ESTUDIANTE B: Si esta fuerza no existiera, el satélite no podría sostenerse en órbita.

PROFESOR: ¿Y qué sucedería entonces con el satélite?

ESTUDIANTE B: Caería a la Tierra.

PROFESOR (dirigiéndose al estudiante A): ¿Recuerda lo que hablamos antes? Cuando se trata de explicar la existencia de una fuerza a partir del carácter del movimiento de un cuerpo y no de la interacción entre los cuerpos, ¿ve Ud.?, puesto que hay que mantener al satélite en órbita se debe introducir una fuerza que lo «sostenga», mientras que, por el contrario, si la fuerza centrífuga realmente existiera, el satélite no se mantendría en órbita, pues en este caso las fuerzas que actúan sobre el satélite se anularían mutuamente y éste debería volar uniformemente y en línea recta.

ESTUDIANTE A: La fuerza centrifuga nunca está aplicada al cuerpo que gira, sino a la ligadura, mientras que sobre el cuerpo que gira está aplicada la fuerza centrípeta.

ESTUDIANTE B: ¿Resulta entonces que sobre el satélite actúa solamente su peso?

PROFESOR: Sí, solamente su peso.

ESTUDIANTE B: ¿Y en esas condiciones no cae en la Tierra?

PROFESOR: El movimiento de un cuerpo por acción de la fuerza de gravedad se llama caída. Esto quiere decir, que el satélite cae. Sin embargo, al «caer» describe una circunferencia alrededor de la Tierra y por lo tanto su caída se prolonga indefinidamente. Nosotros ya hemos investigado el hecho de que la dirección del movimiento de un cuerpo y la de la fuerza que sobre éste actúa no tienen necesariamente que coincidir (ver § 4).

ESTUDIANTE B: Al hablar de la atracción de la Tierra y de la fuerza centrifuga, yo partí de la fórmula

$$\gamma\ m\ M / r^2 = m\ v^2 / r \qquad (34)$$

el término de la izquierda en esta igualdad representa la fuerza de atracción (m es la masa del satélite y M, la masa de la Tierra, r es el radio de la órbita y γ la constante gravitatoria). mientras que el término de la derecha es la fuerza centrifuga (v es la velocidad del satélite). ¿Quiere decir que esta fórmula no es cierta?

PROFESOR: No, la fórmula es correcta. Seguramente no lo es el análisis que usted hace de la fórmula. Usted interpreta la relación (34) como la ecuación del equilibrio de dos fuerzas. Sin embargo, esta fórmula es la expresión de la segunda ley de Newton

$$F = m\ a \qquad (34a)$$

donde

$$F = \gamma\ m\ M / r^2$$

y

$$a = v^2 / r$$

es la aceleración centrípeta.

ESTUDIANTE B: Estoy de acuerdo en que su interpretación permite hacer el análisis del movimiento sin introducir la fuerza centrifuga, pero entonces, si no existe esta fuerza, por lo menos debe existir la fuerza centrípeta. Sin embargo, usted tampoco habla de esta última.

PROFESOR: En el caso dado la fuerza centrípeta, es la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre el satélite. Subrayo: *aquí no se trata de dos fuerzas distintas sino que es una misma fuerza*.

ESTUDIANTE B: Entonces ¿para qué introducir el concepto de fuerza centrípeta?

PROFESOR: En esto estoy completamente de acuerdo con usted. Yo considero, que el término de «fuerza centrípeta» sólo trae mayor confusión. Lo que se entiende por fuerza centrípeta, de ninguna manera es una fuerza independiente aplicada a un cuerpo junto con las demás fuerzas, sino que es la resultante de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo, que se mueve uniformemente en una circunferencia. La magnitud mv^2/r no es una fuerza sino que representa el producto de la masa del cuerpo m por la aceleración centrípeta v^2r. Esta aceleración está dirigida hacia el centro, lo que indica que la resultante de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo que gira uniformemente a lo largo de una circunferencia está dirigida hacia el centro. Así pues, existen la aceleración centrípeta (o aceleración normal) y las fuerzas cuya suma vectorial le comunica al cuerpo esta aceleración centrípeta.

ESTUDIANTE B: Debo confesar que me gusta este enfoque del análisis del movimiento circular. Realmente, dicho movimiento no es un caso estático, cuya característica es el equilibrio de fuerzas, sino un problema de dinámica.

ESTUDIANTE A: ¿Si negamos el concepto de fuerza centrípeta, seguramente, tendremos que negar también el término «fuerza centrifuga», inclusive cuando se alta de una cuerda o cualquier otra ligadura?

PROFESOR: El término fuerza centrifuga» es todavía menos apropiado que el de fuerza centrípeta. Esta última existe de todos modos como la resultante de todas las fuerzas, mientras que la fuerza centrífuga no siempre existe.

ESTUDIANTE A: No entiendo la última observación. La fuerza centrifuga es considerada como la reacción de la fuerza centrípeta. ¿Si aquella no siempre existe, quiere decir que no siempre se cumple la tercera ley de Newton?

PROFESOR: La tercera ley de Newton se cumple solamente para fuerzas reales, que se determinan a través de la interacción de los cuerpos y no para las resultantes de éstas. Yo explicaré esta afirmación con el ejemplo que ustedes conocen del péndulo clínico (figura 33). Sobre la bolita actúan dos fuerzas: el peso P y la tensión T de la cuerda. La resultante de estas fuerzas le comunica a la bolita una aceleración dirigida hacia el centro y se llama fuerza centrípeta. La fuerza P es el resultado de la interacción de la botita con la Tierra y su reacción es la fuerza P_1 ejercida sobre la Tierra.

La fuerza T es el producto de la interacción entre la bolita y la cuerda. La reacción de esta última es la fuerza T, ejercida sobre la cuerda. Si formalmente sumamos las fuerzas P_1 y T_1 obtenemos la fuerza que suelen llamar fuerza centrifuga (ver el diagrama con líneas punteadas de la Figura 33).

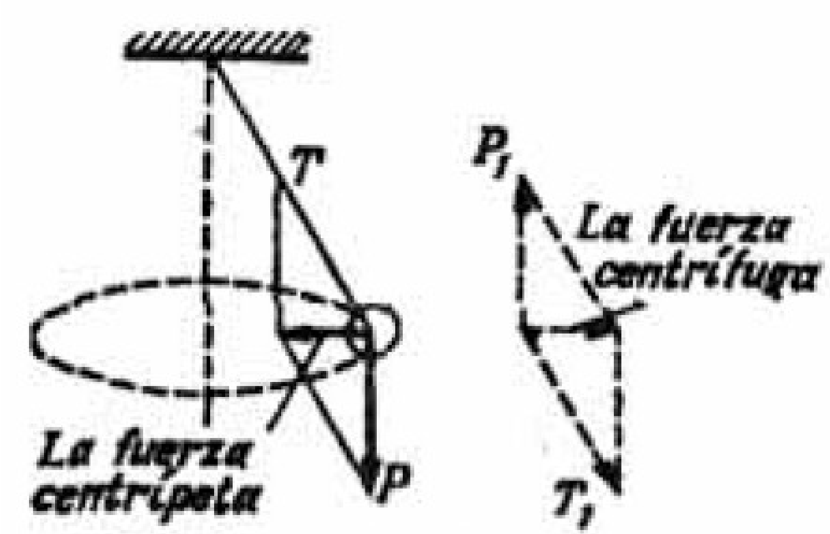


Figura 33

Pero ¿sobre qué cuerpo está aplicada esta fuerza? ¿Podemos decir que se trata de una fuerza, si una de sus componentes está aplicada a la Tierra y la otra, a otro cuerpo totalmente diferente (la cuerda)? Es evidente. que en nuestro caso el concepto de fuerza centrífuga no tiene ningún sentido físico.

ESTUDIANTE A: ¿En qué casos existe la fuerza centrífuga?

PROFESOR: Por ejemplo, en el caso del satélite, en donde interaccionan solamente dos cuerpos: la Tierra y el satélite. La fuerza centrípeta es la atracción que la Tierra ejerce sobre el satélite, mientras que la fuerza centrífuga representa la atracción que el satélite ejerce sobre la Tierra.

ESTUDIANTE B: Usted dijo que la tercera ley de Newton no se cumple para la resultante de las fuerzas reales. Yo pienso que en tal caso tampoco se cumple para las componentes de una fuerza real. ¿Es esto correcto?

PROFESOR: Si, es correcto. Citaré un ejemplo que por cierto no tiene nada en común con el movimiento giratorio. Una esfera descansa sobre el piso apoyada a una pared que forma con el suelo un ángulo obtuso (figura 34).

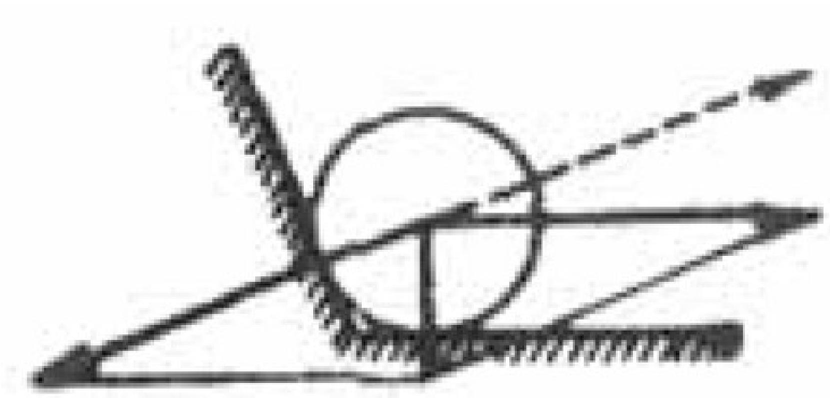


Figura 34

Descompongamos el peso de la esfera en dos componentes: una perpendicular a la pared y otra paralela al suelo y en lugar del peso analizaremos sus componentes. Si la tercera ley de Newton se aplica a las componentes entonces se podría hablar de la reacción de la pared, la cual debería equilibrar a la componente del peso, perpendicular a la pared. En este caso, la componente paralela al piso quedada sin equilibrio y debido a esto la esfera estaría sometida a una aceleración horizontal. Es evidente que esto es físicamente un absurdo.

ESTUDIANTE A: Usted hasta ahora ha hablado del movimiento circular uniforme. ¿Qué sucede si el movimiento del cuerpo en la circunferencia no es uniforme? Digamos, por ejemplo, que se trata de un cuerpo que dejamos deslizar desde la cumbre de un aro. Mientras desliza sobre el aro, el cuerpo se mueve en una circunferencia. Sin embargo, es muy claro que este movimiento no es uniforme puesto que la velocidad del cuerpo crece constantemente. ¿Qué se debe hacer en este caso?

PROFESOR: Si el cuerpo gira en una circunferencia uniformemente, la resultante de todas las fuerzas aplicadas a éste necesariamente está dirigida hacia el centro y le comunica al cuerpo la aceleración centrípeta. En el caso más general de un movimiento circular no uniforme, la resultante no está dirigida estrictamente hacia el centro, sino que tiene una componente radial dirigida hacia el centro y la otra en la dirección de la tangente a la trayectoria del cuerpo (es decir, a la circunferencia). La primera componente produce la aceleración centrípeta del cuerpo, la segunda, la aceleración tangencial, que es la que ocasiona un cambio en la dirección de la velocidad del cuerpo. Hay que subrayar, que como la velocidad del cuerpo varía, debe también variar la aceleración centrípeta v^2r.

ESTUDIANTE A: Esto indica que para cada instante de tiempo, la aceleración centrípeta se determina por la fórmula $a = v^2 / r$, donde v es la velocidad instantánea.

PROFESOR: Exactamente. Si en el movimiento circular uniforme la aceleración centrípeta permanece constante en el movimiento circular no uniforme ésta varia durante el movimiento del cuerpo.

ESTUDIANTE A: ¿En qué debo basarme, para saber precisamente cómo varía la velocidad v cuando el cuerpo no gira uniformemente?

PROFESOR: Generalmente se apoyan en la ley de la conservación de la energía. Veamos un ejemplo concreto. *Supongamos que un cuerpo desliza sin fricción desde la cumbre de un aro, de radio R, colocado verticalmente. ¿Cuál es la presión que este cuerpo ejerce sobre el aro al pasar por el punto que se encuentra a una altura menor que la cumbre en un valor h? La velocidad inicial del cuerpo en la cumbre del aro es igual a cero.* Primero hay que encontrar las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo.

ESTUDIANTE A: Sobre el cuerpo actúan dos fuerzas: el peso P y la fuerza de reacción N. Estas están representadas en el diagrama de la figura 35.

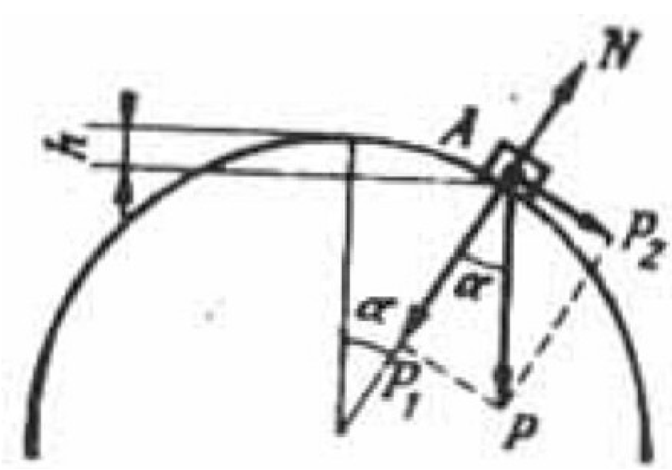


Figura 35

PROFESOR: Correcto. ¿Qué hace después?

ESTUDIANTE A: Procederé de acuerdo a sus indicaciones. Encuentro la fuerza resultante y luego la descompongo en sus dos componentes: radial y tangencial.

PROFESOR: Todo está bien. Sin embargo, es más sencillo, sin necesidad de encontrar la resultante, descomponer de una vez todas las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo en las dos direcciones indicadas, sobre todo si tenemos en cuenta que el peso es la única fuerza que tenemos que descomponer.

ESTUDIANTE A: La descomposición la hago en la figura 35.

PROFESOR: La fuerza P, proporciona la aceleración tangencial del cuerpo, ésta no nos interesa. La resultante de las fuerzas P, y N produce la aceleración centrípeta del cuerpo, es decir,

$$P_1 — N = mv^2 / R \qquad (35)$$

La velocidad del cuerpo en el punto que nos interesa (el punto A de la figura 35), la encontramos a partir de la ley de la conservación de la energía:

$$Ph = mv^2/2 \qquad (36)$$

Unificando (35) y (36) y teniendo en cuenta que $P_1 = P \cos \alpha = P(R — h)/R$. obtenemos

$$P(R — h)/R — N = 2Ph/R.$$

La presión que buscamos, es igual, de acuerdo a la tercera ley de Newton, a la reacción del apoyo

$$N = P(R — 3h)/R \qquad (37)$$

ESTUDIANTE B: En su razonamiento, se supone que en el punto A el cuerpo todavía descansa sobre la superficie del aro, pero puede suceder que el cuerpo se despegue del aro antes de llegar al punto A.

PROFESOR: Se puede encontrar el punto en donde el cuerpo debe despegarse del aro. Este punto corresponde al caso límite cuando la presión del cuerpo sobre el aro disminuye a cero. Para esto en (37) colocamos el valor N = 0 y luego de la ecuación que obtengamos encontramos h, es decir, la distancia vertical desde el punto vértice del aro hasta el punto donde se separa el cuerpo

$$h_0 = R/3 \qquad (38)$$

Si en el problema propuesto el valor de h satisface la condición $h < h_0$. entonces es válido el resultado (37); en el caso contrario, $h > h_0$, tendremos N = 0.

ESTUDIANTE A: Según entiendo, en el problema considerado se han utilizado dos leyes de la Física (35) y (36).

PROFESOR: Está muy bien que usted haya prestado atención a este hecho. Realmente, en este problema se emplearon dos leyes: la segunda ley de Newton; [ver (35)] y la ley de la conservación de la energía [ver (36)]. Desafortunadamente, los examinandos no saben claramente, cuáles son las leyes que han utilizado en la solución de un problema, lo cual es de gran importancia.

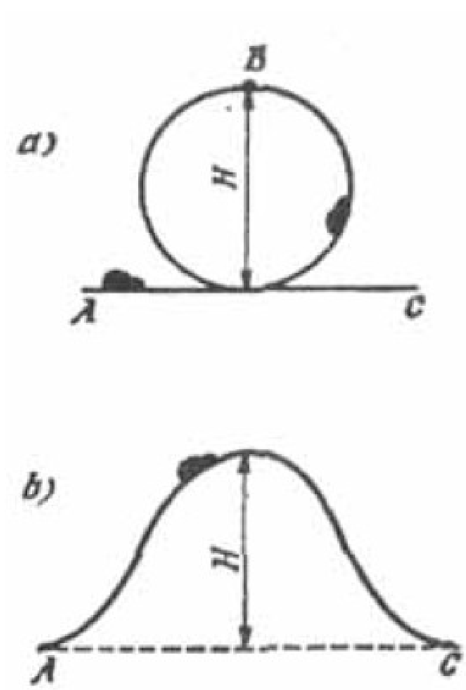


Figura 36

Traigo al caso el siguiente ejemplo. *A un cuerpo le comunicamos una velocidad inicial v_0 para que éste pueda pasar del punto A al punto B, siguiendo dos caminos diferentes (ver figura 36. a, b). En ambos casos el cuerpo debe sobrepasar la misma altura H, pero en forma diferente. Se pide encontrar la velocidad inicial mínima v_0 para ambos casos. Se puede despreciar la fuerza de fricción.*

ESTUDIANTE B: Yo creo que en ambos casos la velocidad inicial mínima debe ser la misma, puesto que consideramos que no existe fricción y hay que sobrepasar la misma altura. Esta velocidad se puede calcular a partir de la ley de la conservación de la energía:

$$mgH = mv_0^2 / 2,$$

de donde

$$v_0 = \sqrt{2gH}$$

PROFESOR: Su respuesta es incorrecta. Usted no tuvo en cuenta que en el primer caso el cuerpo se mueve con movimiento giratorio cuando pasa por el punto más alto de la trayectoria. Esto quiere decir que en el vértice (figura 36, a) el móvil tendrá una velocidad v_1 que se determina a partir de una igualdad (dinámica) análoga a la igualdad (35).

Por cuanto en este problema se investiga el caso crítico, hay que tomar el caso extremo y suponer que en el punto B la presión del cuerpo sobre el apoyo se hace igual a cero. En este caso sobre el cuerpo actúa solamente el peso, el cual le comunica la aceleración centrípeta, es decir,

$$mg = mv_1^2/R = 2mv_1^2/H \qquad (39)$$

Si a esta igualdad (dinámica) le agregamos la igualdad (39) de las energías

$$mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + mgH \qquad (40)$$

obtenemos que el valor mínimo de la velocidad inicial es igual a $\sqrt{5gH/2}$.

En el segundo caso el cuerpo puede pasar por el punto más alto de la trayectoria con una velocidad infinitamente pequeña, de tal manera, que nos podemos limitar a igualar las energías y entonces el resultado que usted propone es justo.

ESTUDIANTE B: He comprendido. Si en el primer caso al llegar al punto B el cuerpo tiene una velocidad igual a cero sencillamente caerá al suelo.

PROFESOR: Si en el primer caso el cuerpo tuviese la velocidad inicial $v_0 = \sqrt{2gH}$ que usted propone, éste se desprendería del soporte antes de alcanzar el punto B. Yo sugiero que ustedes encuentren la altura h del punto donde se desprende el cuerpo cuando su velocidad inicial es $v_0 = \sqrt{2gH}$

ESTUDIANTE A: ¿Me permite probar?

PROFESOR: Por supuesto.

ESTUDIANTE A: En el punto de desprendimiento del cuerpo la reacción del soporte es, evidentemente, igual a cero. Por lo tanto en este punto, sobre el cuerpo actúa solamente su peso.

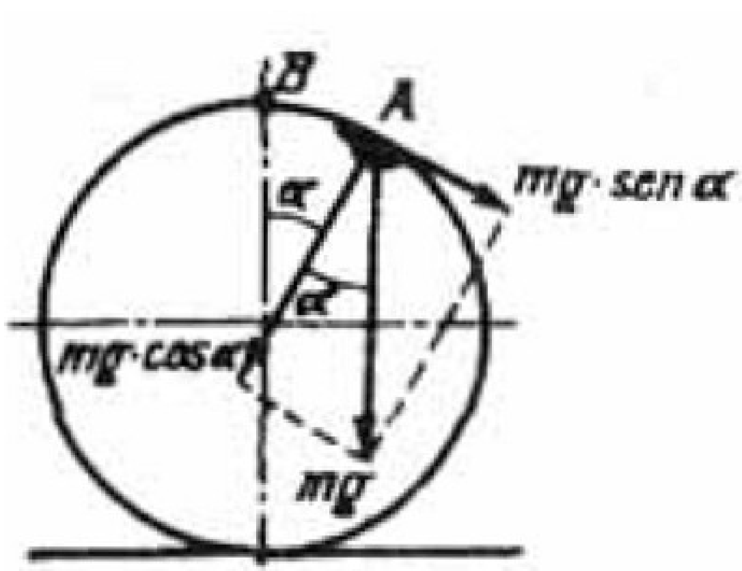


Figura 37

Descomponemos a éste en sus componentes, paralela (mg cos α) y perpendicularmente (mg sen α) al radio, como lo muestra la figura 37 (el punto A es el punto de desprendimiento). La componente radial le comunica al cuerpo la aceleración centrípeta, que se determina por la igualdad

$$mg \cos \alpha = mv_1^2/R \qquad (41)$$

donde v_1 es la velocidad del cuerpo en el punto A. Para determinar esta última utilizamos la igualdad energética:

$$mv_2^2/2 + mgh = mv_0^2/2 \qquad (42)$$

Uniendo las igualdades, dinámica (41) y energética (42). y teniendo en cuenta que $\cos \alpha = (h — R)/R$, obtenemos

$$mg\,(h — R) = mv_0^2 — 2mgh$$

a partir de lo cual encontramos que

$$h = (2v_0^2 + gH)/6g \qquad (43)$$

Colocando aquí $v_0^2 = 2gH$, obtenemos el resultado que buscamos

$$H = 5H/6.$$

PROFESOR: Todo está correcto, tan sólo quiero agregar que, utilizando el resultado (43), se puede hallar el valor de v_0 para el cual el cuerpo rizaría el rizo (es decir, describiría un rizo muerto). Para ello es necesario colocar en (43) $h = H$, en tal caso

$$H = (2v_0^2 + gH)/6g$$

De aquí deducimos el valor que ya conocemos:

$$v_0 = \sqrt{5gH/2}$$

ESTUDIANTE A: La condición (43) se obtuvo para el caso cuando el cuerpo se desprende del apoyo, entonces. ¿cómo es posible utilizar el mismo resultado para el caso cuando el objeto describe el rizo sin desprenderse?

PROFESOR: El desprendimiento en el punto más alto del rizo no significa que el cuerpo en realidad se desprenda sino que, al pasar por dicho punto, continúa su movimiento circular.

ESTUDIANTE B: Se puede decir que es como si el cuerpo se desprendiera por un instante.

PROFESOR: Sí, así lo podemos considerar. Para terminar sugiero que analicemos el siguiente problema. *En el extremo de un plano inclinado un ángulo α descansa un cuerpo. El plano gira uniformemente alrededor de un eje vertical con una velocidad angular ω. La distancia del cuerpo al eje de giro del plano es igual a R. Encontrar el valor mínimo del coeficiente k_0 (recordemos que este coeficiente caracteriza al máximo valor posible de la fuerza de fricción estática), para el cual el cuerpo se mantiene sobre el plano inclinado que gira (figura 38, a).*

Empecemos como siempre con una pregunta: ¿a qué fuerzas está sometido el cuerpo?

ESTUDIANTE A: Sobre el cuerpo están aplicadas tres fuerzas: el peso P, la fuerza normal N y la fuerza de fricción F_r.

PROFESOR: Correcto. Está bien que usted no haya agregado la fuerza centrípeta. ¿Qué hará luego?

ESTUDIANTE A: Después de esto, descompongo las fuerzas en sus componentes perpendiculares y paralelas al plano inclinado, como se indica en la figura 38, b.

PROFESOR: Aquí le interrumpo. No me gusta su procedimiento. Dígame, ¿hacia dónde está dirigida la aceleración del cuerpo?

ESTUDIANTE A: La aceleración está dirigida horizontalmente y es precisamente la aceleración centrípeta.

PROFESOR: Correcto, por esta razón es necesario descomponer las fuerzas en la dirección horizontal (es decir, en la dirección de la aceleración) y en la dirección vertical (es decir, perpendicular a la aceleración). Recuerde lo que discutimos en el § 6.

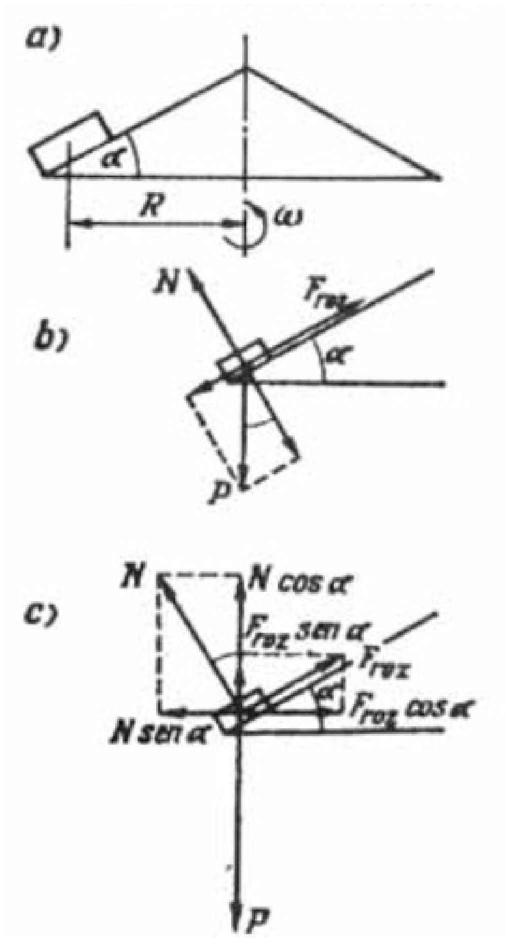


Figura 38

ESTUDIANTE A: Si. Entiendo. La descomposición de las fuerzas en direcciones horizontal y vertical está indicada en la figura 38. c. Las componentes verticales se compensan mutuamente, mientras que las horizontales originan la aceleración del cuerpo

$$N \cos \alpha + F_r \operatorname{sen} \alpha = P$$

$$F_r \cos \alpha - N \operatorname{sen} \alpha = mv^2/R$$

Teniendo en cuenta que, $F_r = k_0 N$, $v^2/R = \omega^2 R$ y $m = P/g$, escribamos estas relaciones en la forma siguiente:

$$N(\cos \alpha + k_0 \operatorname{sen} \alpha) = P$$

$$N(k_0 \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) = mv^2/R$$

ESTUDIANTE B: Aquí tenemos solamente dos ecuaciones y las incógnitas son tres: k_0, P, N.

PROFESOR: Esto no es un inconveniente serio, puesto que no necesitamos determinar todas las tres magnitudes desconocidas sino tan sólo una de ellas: el coeficiente k_0. Las magnitudes P y N se pueden eliminar fácilmente dividiendo la primera ecuación por la segunda.

ESTUDIANTE A: Después de dividir estas ecuaciones obtenemos

$$\frac{\cos \alpha + k_0 \operatorname{sen} \alpha}{k_0 \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} = \frac{g}{\omega^2 R}$$

De aquí determinamos el resultado que buscamos

$$k_0 = (\omega^2 R \cos \alpha + g \operatorname{sen} \alpha)/(g \cos \alpha - \omega^2 R \operatorname{sen} \alpha) \qquad (44)$$

PROFESOR: De la fórmula (44) se aprecia que debe cumplirse la condición

$$(g \cos \alpha - \omega^2 R \operatorname{sen} \alpha) > 0$$

la cual puede .escribirse en la forma

$$\operatorname{tg} \alpha < (g/\omega^2 R) \qquad (45)$$

Si la condición (45) no se cumple entones ninguna fuerza de fricción podrá sostener el cuerpo sobre el plano inclinado cuando éste gira.

PROBLEMAS

15. ¿Cómo están relacionadas entre sí las fuerzas con las cuales un tanque hace presión en el centro de un puente convexo y de un puente cóncavo? El radio de

curvatura del puente en ambos casos es igual a 40 m y la velocidad del tanque es de 45 km/h.

16. Un cuerpo desliza sin fricción desde una altura H=60 cm y riza un rizo de radio R=20 cm (figura 39). Encontrar la relación entre las fuerzas con las cuales el cuerpo presiona sobre el apoyo en los puntos A, B y C.

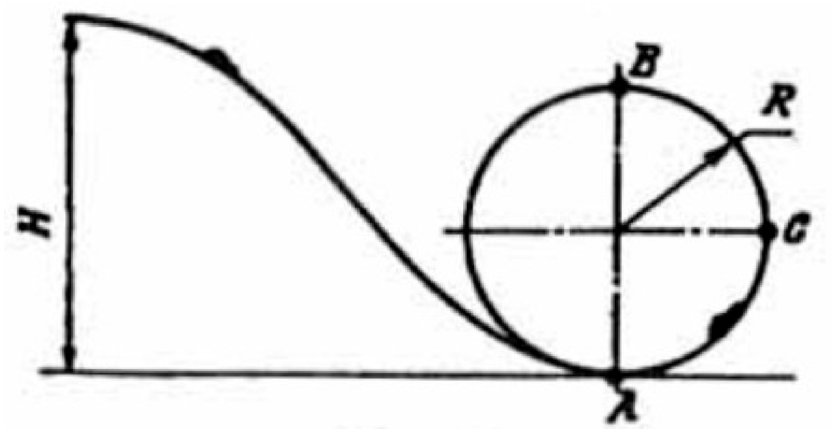
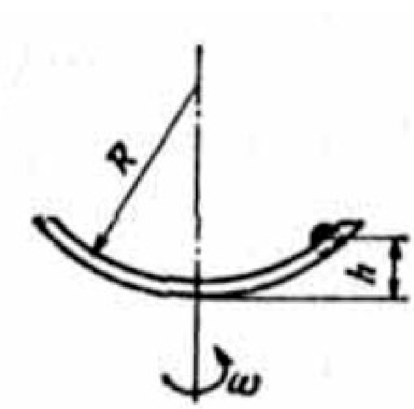
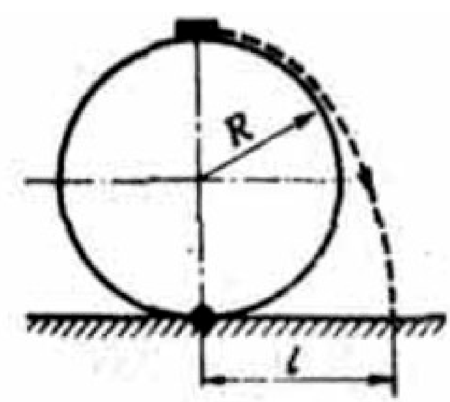


Figura 39

17. Un cuerpo gira en el plano vertical atado a una cuerda de longitud R. ¿Cuál debe ser la velocidad horizontal que hay que comunicarle al cuerpo en su posición más alta para que la tensión de la cuerda en la posición más baja resulte 10 veces mayor que el peso del cuerpo?

18. Calcular la densidad de un planeta de forma esférica, si un satélite gira a su alrededor en una órbita circular con un periodo T y a una distancia de la superficie del planeta igual a la mitad de su radio R.





Figuras 40 y 41

19. Por un canal torcido en forma circular de radio R, desliza sin fricción un cuerpo de masa m. ¿A qué altura h se encontrará dicho cuerpo si el riel gira uniformemente con una velocidad angular ω (figura 40)? ¿Con qué fuerza F el cuerpo hace presión sobre el riel?

20. Un aro de radio R está fijo verticalmente en el suelo. De la cumbre del aro desliza sin rozamiento un cuerpo (figura 41). ¿A qué distancia l del punto de apoyo del aro cae el cuerpo?

§ 9. ¿COMO EXPLICA USTED LA IMPONDERABILIDAD DE LOS CUERPOS?

PROFESOR: ¿Cómo entiende usted la siguiente expresión?: «En el ecuador de un planeta un cuerpo pesa menas que en los polos».

ESTUDIANTE B: Yo lo entiendo así. En el ecuador la fuerza con la cual la Tierra atrae al cuerpo es menor que en los polos, lo cual se explica por dos causas. Primero, porque la Tierra es ligeramente achatada en los polos y por lo tanto la distancia del centro de la Tierra al polo es algo menor que la distancia del centro a la línea ecuatorial. Segundo, porque la Tierra gira sobre su eje y debido a esto la atracción en el ecuador resulta debilitada por el efecto de la fuerza centrifuga.

ESTUDIANTE A: Explique, por favor, su última observación.

ESTUDIANTE B: De la fuerza de la atracción hay que restar la fuerza centrífuga.

ESTUDIANTE A: No estoy de acuerdo con usted, por dos razones. Primero, la fuerza centrifuga no se aplica al cuerpo que se mueve en una circunferencia, acerca de lo cual ya se habló en el parágrafo anterior. Segundo, inclusive si dicha fuerza existiera, de todas maneras no le impediría a la fuerza de atracción conservar exactamente su valor aunque la Tierra no rotase, puesto que la fuerza de atracción es igual a $\gamma mM/r^2$ y por si misma, actúen o no actúen sobre el cuerpo otras fuerzas, no cambiará.

PROFESOR: Como ustedes ven, la pregunta acerca de la «ponderabilidad de los cuerpos» no resulta tan fácil, No en vano esta pregunta corresponde a aquellas preguntas sobre las cuales los examinandos muy frecuentemente responden incorrectamente, En realidad, si entendemos por el término «peso del cuerpo» a la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre el cuerpo o sea a la fuerza igual a

$\gamma mM/r^2$, entonces la «disminución del peso de un cuerpo en el ecuador» se debe relacionar solamente con el achatamiento del globo terrestre en los polos.

ESTUDIANTE B: ¡Pero debemos tener en cuenta la rotación de la Tierra!

PROFESOR: Estoy de acuerdo con usted. Simplemente, quiero subrayar que en la práctica por el término «peso del cuerpo» entienden no la fuerza de atracción de la Tierra, y esto es completamente lógico, sino a la fuerza que se mide con ayuda de las balanzas de resortes, es decir, a la fuerza con la cual el cuerpo hace presión la Tierra. Dicho en otras palabras, miden la fuerza de reacción del apoyo (la fuerza con la cual el cuerpo hace presión sobre el apoyo y la fuerza de reacción de éste son iguales de acuerdo con la tercera ley de Newton). De esto se concluye que la expresión «todo cuerpo en el ecuador pesa menos que en el polo» prácticamente significa que en el ecuador el cuerpo hace presión sobre el apoyo con menor fuerza que en el polo.

Llamemos P_1 a la fuerza de atracción en el polo, P_2 a esta misma fuerza en el ecuador, N_1 y N_2 a las fuerzas normales o de reacción en el polo y en el ecuador, respectivamente. En el polo el cuerpo está en reposo y en el ecuador se mueve en una circunferencia. De ahí obtenemos

$$P_1 - N_1 = 0$$
$$P_2 - N_2 = ma_c$$

donde a_c es la aceleración centrípeta. Escribamos estas relaciones en la siguiente forma

$$P_1 = N_1$$
$$P_2 = N_2 - ma_c \qquad (46)$$

De la última expresión vemos claramente, que la fuerza N_2 es menor que N_1. Primero, porque P_2 es menor que P_1 (por el efecto del achatamiento en los polos) y segundo porque a P_2 debemos restarle el valor ma_c, (por el efecto de la rotación de la Tierra).

ESTUDIANTE B: ¿Según esto, la expresión «un cuerpo perdió la mitad de su peso», no quiere decir que la fuerza de atracción que la Tierra ejerce (o que ejerce cualquier otro planeta) sobre este objeto se hizo dos veces menor?

PROFESOR: No, de ninguna manera. Podemos considerar en general que la fuerza de atracción no varía. La frase anterior significa que se hizo dos veces menor la fuerza, con la cual el cuerpo hace presión sobre el apoyo (o sea, la reacción del apoyo).

ESTUDIANTE B: Si eso es así, yo puedo disponer libremente de la «ponderabilidad» de un cuerpo. ¿Qué me impide cavar por debajo del cuerpo que cae un túnel profundo? Después dejo que el cuerpo junto con el apoyo caigan en el túnel. En este caso el cuerpo no ejercerá ninguna presión sobre el apoyo. es decir, ¿pierde totalmente su peso, lo que significa que se encuentra en estado de imponderabilidad?

PROFESOR: Usted mismo ha llegado a una conclusión correcta, En realidad, el estado de imponderabilidad es el estado de un cuerpo que cae libremente. Al respecto, quiero hacer algunas observaciones. En cierta ocasión me encontré con una interpretación de la imponderabilidad como un estado en el cual la fuerza de atracción de la Tierra se compensa por la acción de otra fuerza. En calidad de la fuerza compensadora, en el caso de un satélite, se hablaba de la fuerza centrifuga. Decían así: la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre el satélite y la fuerza centrifuga se compensan entre sí y como consecuencia de esto, la resultante de las fuerzas aplicadas al satélite es igual a cero, lo que corresponde a la imponderabilidad. Ustedes por supuesto ya comprenden que esta interpretación es falsa puesto que sobre el satélite no actúa la fuerza centrífuga. A propósito, si por imponderabilidad se entiende el estado en el cual la fuerza de atracción se compensa con otra fuerza, entonces sería lógico llamar imponderable a un cuerpo que simplemente se encuentra en reposo sobre un plano horizontal, puesto que precisamente el peso y la reacción del plano se compensan mutuamente. La imponderabilidad no requiere la compensación de la fuerza de atracción, por el contrario, para que un cuerpo adquiera el estado de imponderabilidad hay que crear condiciones, mediante las cuales sobre el cuerpo no actúan más fuerzas que la de atracción. En otras palabras, es necesario que la reacción del apoyo sea nula. La caída de un cuerpo es el movimiento de éste por acción de la fuerza gravitatoria. Por consiguiente, la imponderabilidad es el estado de un cuerpo que cae libremente, por ejemplo, la caída de un ascensor, o un satélite terrestre.

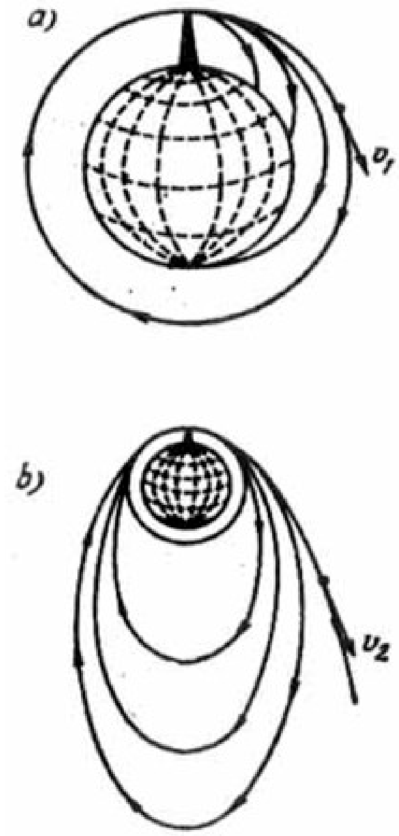


Figura 42

ESTUDIANTE A: En el parágrafo anterior ya se dijo que el movimiento de un satélite de la Tierra no es más que la caída que se prolonga indefinidamente del satélite a la Tierra.

PROFESOR: Podemos convencernos de que el movimiento de un satélite alrededor de la Tierra es simplemente la caída libre de éste, con ayuda de este sencillo ejemplo. Imaginémonos que desde la cima de una montaña lanzamos una piedra horizontalmente. Despreciamos el efecto del aire; cuanto mayor sea la velocidad inicial que le imprimimos a la piedra, más lejos caerá ésta del pie de la montaña. La figura 42 a, muestra como varía regularmente la trayectoria de la piedra cuando aumentamos su velocidad inicial. Para una cierta velocidad v_1 la trayectoria que describe la piedra al caer es una circunferencia y entonces se convierte en un satélite de la Tierra. La velocidad v_1, se denomina primera velocidad cósmica y se puede determinar a partir de la relación (34)

$$v_1 = \sqrt{\gamma M/r} \qquad (47)$$

Si se toma el radio r de la órbita del satélite aproximadamente igual al radio de la Tierra, tendremos $v_1 \approx 8$ km/s.

ESTUDIANTE A: ¿Y qué sucederá si continuamos aumentando la velocidad inicial de la piedra que lanzamos desde la montaña?

PROFESOR: En este caso la piedra se moverá alrededor de la Tierra describiendo una elipse cada vez más alargada (figura 42, b) y para un cierto valor v_2 de la velocidad inicial, la trayectoria es una parábola y la piedra deja de ser un satélite de la Tierra. A esta velocidad v_2 se la denomina segunda velocidad cósmica. Como lo muestran los cálculos, la velocidad v_2 es aproximadamente igual a 11 km/s, es decir, casi $\sqrt{2}$ veces mayor que la velocidad v_1.

ESTUDIANTE A: Usted definió el estado de imponderabilidad como la caída de un cuerpo. Sin embargo, si la velocidad inicial de la piedra alcanza el valor de la segunda velocidad cósmica, la piedra se alejará de la Tierra y en este caso no se podría hablar de la caída de la piedra a la Tierra. ¿Cómo se debe interpretar en este caso la imponderabilidad de la piedra?

PROFESOR: Muy sencillo. La imponderabilidad en este caso es la caída de la piedra en el Sol.

ESTUDIANTE A: Es decir, ¿la imponderabilidad de una nave cósmica que se encuentra en algún lugar del espacio interestelar se debe interpretar como la caída de dicha nave en el campo gravitacional de algunos astros?

PROFESOR: Exactamente.

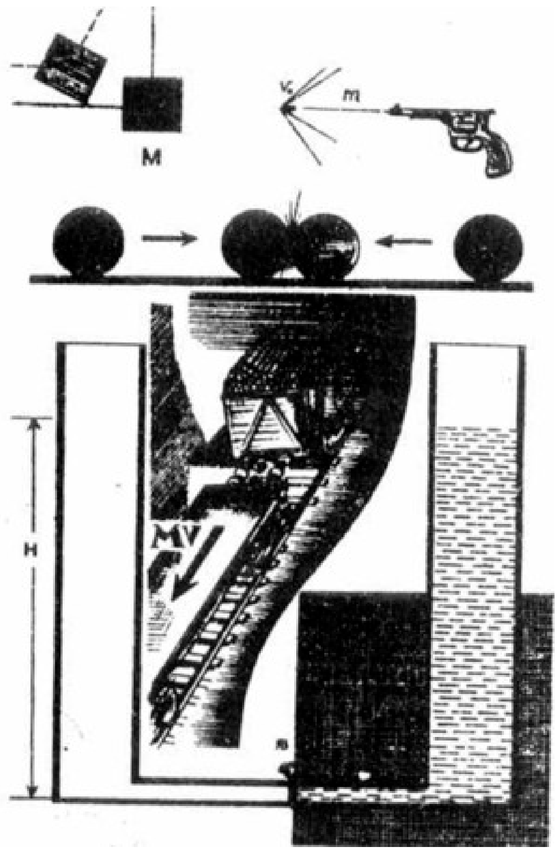
ESTUDIANTE B: A mí me parece de todas maneras, que la definición de imponderabilidad, como la caída de un cuerpo, requiere mayor aclaración; un paracaidista, por ejemplo, también cae, sin embargo, él no experimenta la sensación de imponderabilidad.

PROFESOR: Es cierto. La imponderabilidad no es una caída cualquiera, la imponderabilidad es lo que denominamos caída libre, es decir, el movimiento de un cuerpo por acción, únicamente, de la fuerza gravitatoria. Ya lo he dicho antes que para que un cuerpo sea imponderable, hay que crear condiciones mediante las cuales sobre el cuerpo no actúe ninguna otra fuerza más que la gravitatoria; en el caso del paracaidista existe una fuerza complementaria, la resistencia del aire.

PROBLEMA

21. Calcular la densidad de un planeta de forma esférica, donde el día es de 10 horas, si se sabe que en el ecuador de dicho planeta los cuerpos son imponderables.

Capítulo 5



Difícilmente podríamos sobrestimar el papel que juegan en la Física las leyes de la conservación. Estas leyes representan las reglas más generales obtenidas por el hombre en base a una larga experiencia. La utilización correcta de las leyes de la conservación permite resolver con relativa facilidad muchos problemas. Analicemos algunos ejemplos con las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento.

§10. ¿SABE USTED EMPLEAR LAS LEYES DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA Y DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO?

PROFESOR: Quiero proponer una serie de problemas bastante sencillos.

Primer problema: Se tienen dos planos inclinados de igual altura H pero diferentes ángulos de inclinación α_1 y α_2. A lo largo de estos planos deslizan sin rozamiento dos cuerpos cuyas velocidades iniciales son nulas. Calcular las velocidades de estos cuerpos al final del plano inclinado.

Segundo problema. Se sabe que la fórmula $v = \sqrt{2as}$, la cual expresa la velocidad final de un cuerpo en función de la aceleración y del espacio recorrido, se refiere al caso, cuando la velocidad inicial es igual a cero. ¿Cómo quedará esta fórmula cuando al cuerpo se le imprime una velocidad inicial v_0?

Tercer problema. Un cuerpo es lanzado horizontalmente con una velocidad inicial v_1 desde una altura H. Se pide calcular la velocidad del cuerpo al caer en la tierra.

Cuarto problema. Un cuerpo es lanzado formando un ángulo de inclinación α con la horizontal y con una velocidad inicial v_0. Se pide calcular la altura máxima a la cual se eleva dicho cuerpo.

ESTUDIANTE A: El primer problema lo resolveré de la siguiente manera. Consideremos uno de los planos inclinados con un ángulo de inclinación, digamos, α_1. Sobre el cuerpo están aplicadas dos fuerzas: la fuerza de gravedad P y la reacción del apoyo (normal) N_1. Descomponemos la fuerza P en las direcciones paralela al plano inclinado (P sen α_1) y perpendicular a éste (P cos α_1). Establecemos las ecuaciones para las fuerzas que actúan perpendicularmente al plano:

$$P \cos \alpha_1 - N_1 = 0$$

para las fuerzas paralelas al plano inclinado;

$$P \operatorname{sen} \alpha_1 = Pa_1/g$$

aqui a_1 es la aceleración del cuerpo. De la segunda ecuación obtenemos: $a_1 = g \operatorname{sen} \alpha_1$. El espacio, recorrido por el cuerpo, es igual a H/sen α_1. Utilizando luego la fórmula de la cual se habla en el segundo problema, obtenemos que la velocidad del cuerpo al final de recorrido es igual a

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s_1} = \sqrt{2g \operatorname{sen} \alpha_1 H / \operatorname{sen} \alpha_1} = \sqrt{2gH}$$

Puesto que el resultado final no depende del ángulo de inclinación, esta misma fórmula también es válida para el cuerpo que se mueve a lo largo del segundo plano inclinado un ángulo α_1. Para resolver el segundo problema utilizo las relaciones cinemáticas bien conocidas:

$$v = v_0 + at$$
$$s = v_0 t + at^2/2$$

De la primera ecuación obtenemos $t = (v — v_0)/a$. Colocando t en la segunda ecuación. Encontramos

$$s = \frac{v_0(v-v_0)}{a} + \left(\frac{a}{2}\right)\frac{(v-v_0)^2}{a^2}$$

$$2sa = 2v_0v — 2v_0^2 + v^2 — 2vv_0 + v_0^2$$

de donde $2sa = v^2 — v_0^2$. Obtenemos el resultado final

$$v = \sqrt{2as + v_0^2} \qquad (48)$$

Para la solución del tercer problema. primero hallo las componentes horizontal v_1 y vertical v_2, de la velocidad final. Puesto que en la dirección horizontal el cuerpo se mueve uniformemente, entonces $v_1 = v_0$. En la dirección vertical el cuerpo se mueve con una aceleración g, sin velocidad inicial. Por lo tanto, podemos utilizar la relación conocida $v_2 = \sqrt{2gH}$. Utilizando luego el teorema de Pitágoras, obtenemos el resultado que buscamos:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gH} \qquad (49)$$

El cuarto problema ya se analizó en el § 5. Hay que descomponer la velocidad inicial del cuerpo en sus componentes horizontal ($v_0 \cos \alpha$) y vertical (v_0 sen α). Después de esto, analizar el desplazamiento vertical del cuerpo y, primero que todo, encontrar el tiempo de ascenso del cuerpo t_1 a partir de la fórmula de la velocidad en función del tiempo en el movimiento uniformemente retardado, ($v_v = v_0$ sen α — gt), teniendo en cuenta, que para $t = t_1$ la velocidad vertical del cuerpo se hace igual a cero. De esta manera, v_0 sen α — gt_1, de donde $t_1 = (v_0/g)$ sen α. Conociendo t_1 encontramos la altura H utilizando la fórmula del espacio o camino recorrido en función del tiempo en el movimiento uniformemente desacelerado:

$$H = v_0 \text{ sen } \alpha t_1 - gt_1^2/2 = (v_0^2/2g) \text{ sen}^2 \alpha$$

PROFESOR: Las respuestas que usted obtuvo para los cuatro casos son correctas. Sin embargo, no me satisface completamente el método de resolución de estos problemas. Todos éstos se pueden resolver de una manera más sencilla, si se utiliza la ley de la conservación de la energía. Convenzámonos de esto.

Primer problema. La ley de la conservación de la energía se expresa así: $mgH = mv^2/2$ (la energía potencial del cuerpo en el punto más alto del plano inclinado es igual a la energía cinética de éste en el punto más bajo). De ahí fácilmente encontrarnos la velocidad del cuerpo en el punto inferior

$$v = \sqrt{2gH}$$

Segundo problema. En este caso la ley de la conservación de la energía se expresa así: $mv_0^2/2 + mas = mv^2/2$, donde mas es igual al trabajo de la fuerza, que le comunica al cuerpo una aceleración a. Da ahí, inmediatamente obtenemos que

$$v_0^2 + 2as = v^2$$

o finalmente,

$$v = \sqrt{2as + v_0^2}$$

Tercer problema. La ley de la conservación de la energía tiene la forma

$$mgH + mv_0^2 = mv^2/2$$

De donde obtenemos el resultado que buscamos

$$\sqrt{2gH + v_0^2}$$

Cuarto problema. En el punto del lanzamiento la energía del cuerpo es igual a $mv_0^2/2$. En el punto más alto de su trayectoria, el cuerpo tiene energía igual a $mgH-mv_1^2/2$. Puesto que la velocidad v_1 en el punto de altura máxima es igual a $v_0 \cos \alpha$, entonces, utilizando la ley de la conservación de la energía

$$mv_0^2/2 = mgH + (mv_0^2/2) \cos^2 \alpha$$

encontramos

$$H = (v_0^2/2g) (1 — \cos^2 \alpha)$$

o finalmente,

$$H = (v_0^2/2g) \operatorname{sen}^2 \alpha)$$

ESTUDIANTE A: Me he convencido de que estos problemas se habrían podido resolver de una manera mucho más fácil. Simplemente no pensé en la ley de la conservación de la energía.

PROFESOR: Desafortunadamente, en los exámenes a menudo se olvidan de esta ley y los estudiantes empiezan a resolver esta clase de problemas con la ayuda de métodos mas complicados, debido a lo cual aumenta la probabilidad de error. Le aconsejo que utilice más ampliamente y con mayor seguridad la ley de la conservación de la energía. Al respecto quisiera saber cómo utiliza Ud. esta ley.

ESTUDIANTE A: Me parece que aqui no se necesita ningún artificio especial, la ley de la conservación de la energía es en sí muy sencilla.

PROFESOR: La habilidad para utilizar una ley no se determina por su complejidad o sencillez. Veamos un ejemplo concreto. Supongamos, que un cuerpo se mueve uniformemente en una circunferencia situada en un plano horizontal, sin tener en cuenta la fricción. Sobre el cuerpo actúa la fuerza centrípeta. ¿A qué es igual el trabajo que esta fuerza realiza durante un ciclo?

ESTUDIANTE A: El trabajo es igual al producto de la fuerza por el camino recorrido. O sea, que en este caso es igual a $2\pi R\ (mv^2/R) = 2\pi mv^2$, donde R es el radio de la circunferencia, m y v, la masa y la velocidad del cuerpo, respectivamente.

PROFESOR: Según la ley de la conservación de la energía el trabajo no puede desaparecer en vano. ¿Qué se hizo el trabajo que usted ha calculado?

ESTUDIANTE A: Se gasta en la rotación del cuerpo.

PROFESOR: No entiendo. Exprésese en forma más clara.

ESTUDIANTE A: Para mantener el cuerpo girando sobre la circunferencia.

PROFESOR: Su razonamiento es falso. Para mantener un cuerpo girando en una circunferencia, no se exige ningún trabajo.

ESTUDIANTE A: En tal caso, no sé cómo responder a su pregunta.

PROFESOR: La energía comunicada a un cuerpo se puede distribuir, como dicen los físicos, en los siguientes «canales»:

1. en el aumento de la energía cinética del cuerpo;
2. en el incremento de la energía potencial del cuerpo;
3. en el trabajo realizado por el cuerpo dado sobre otros cuerpos,
4. en el calor desprendido como consecuencia de la fricción.

Esta es la posición general que no todos los estudiantes comprenden claramente.

Ahora estudiemos un caso concreto sobre el trabajo de la fuerza centrípeta. Un cuerpo se mueve con una velocidad cuya magnitud es constante, por consiguiente, su energía cinética no varía: el primer canal está cerrado. El cuerpo se mueve en un plano horizontal, por lo tanto, tampoco varía su energía potencial: cerrado el segundo canal. El cuerpo considerado no realiza trabajo sobre ningún otro cuerpo:

cerrado el tercer canal. Finalmente, está excluida cualquier clase de fricción: el cuarto canal resulta también cerrado.

ESTUDIANTE A: ¿Sucede entonces que el trabajo de la fuerza centrípeta simplemente no hay en qué gastarlo?

PROFESOR: Sí, así parece. Usted debe ahora definir su posición. O bien usted reconoce simplemente que la ley de la conservación de la energía no se cumple, y entonces no obtenemos ningún resultado, o bien usted se basa en la ley de la conservación de la energía y entonces... sería mejor que usted mismo tratara de salir de esta situación.

ESTUDIANTE A: Yo creo, que en este caso debo concluir que la fuerza centrípeta no realiza trabajo.

PROFESOR: Esta es una conclusión totalmente lógica. Quisiera subrayar de manera especial que esta deducción es una consecuencia directa de la ley de la conservación de la energía

ESTUDIANTE B: Pero de todas maneras: ¿Qué hacemos con la fórmula del trabajo?

PROFESOR: Esta fórmula, además de la fuerza y del camino recorrido, debe incluir también el coseno del ángulo comprendido entre las direcciones de la fuerza y de la velocidad:

$$A = Fs \cos \alpha$$

En el caso dado $\cos \alpha = 0$

ESTUDIANTE A: Verdad que sí. Me olvidé por completo del coseno del ángulo.

PROFESOR: Quiero proponer otro ejemplo. Consideremos dos vasos comunicantes, unidos por un tubo con llave estrecho. Supongamos que al principio todo el líquido se encuentra en el recipiente de la izquierda y su nivel alcanza una altura H (fig. 43. a). Abrimos la llave, y el líquido fluye del recipiente de la izquierda al de la derecha. La posición final corresponde a la igualdad de los niveles del agua en ambos recipientes, los que alcanzan una altura H/2 (fig. 43, b). Calculemos la energía potencial del líquido en los estados inicial y final, para lo cual multipliquemos el peso del líquido en cada recipiente por la mitad de la altura de la columna de líquido. Si en el estado inicial la energía potencial es igual a (P/2)(H/4), entonces. en el estado final ésta resulta igual a

$$(P/2)(H/4)+(P/2)(H/4)= PH/4.$$

En esta forma, en el estado final la energía potencial del liquido resulta dos veces menor, que en el estado inicial. Se pregunta: ¿Qué se hizo la otra mitad de la energía?

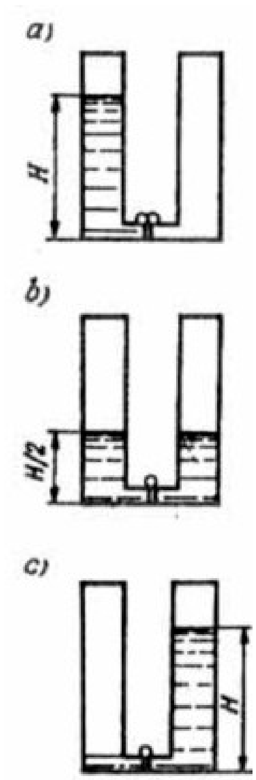


Figura 43

ESTUDIANTE A: Yo trataré de razonar de la manera como usted ha indicado, La energía potencial PH/4 pudo gastarse en el trabajo del líquido sobre otros cuerpos, en el calor emitido durante la fricción y en la energía cinética del mismo liquido. ¿Mi razonamiento es correcto?

PROFESOR: Perfectamente. Continúe.

ESTUDIANTE A: En el caso considerado, el líquido no realiza ningún trabajo sobre otros cuerpos (extraños) al pasar de un recipiente a otro. En su estado final el líquido no tiene energía cinética, puesto que se encuentra en estado de reposo. Es decir, queda por deducir que la mitad de la energía potencial se convirtió en el calor desprendido durante el rozamiento. No obstante, en realidad, yo no tengo una idea bien clara acerca de qué rozamiento se trata.

PROFESOR: Usted ha razonado correctamente y su conclusión es correcta. Ahora hablemos algo sobre la fricción. Podemos imaginarnos, que el líquido está dividido en capas, a cada una de las cuales le corresponde una determinada velocidad de desplazamiento del líquido, cuanto más cerca se encuentre una capa a las paredes del tubo, tanto menor es su velocidad. Entre las distintas capas hay intercambio de moléculas, y como resultado de esto, las moléculas en movimiento dirigido que tienen mayor velocidad se introducen dentro de las moléculas con menor velocidad del movimiento dirigido, y viceversa. Esto conduce a que una capa «rápida» imprima cierta aceleración a una capa «lenta» y por el contrario, una capa lenta le ofrece resistencia a una capa «rápida». Este modelo permite hablar de la existencia de una fricción interna peculiar entre las diferentes capas del líquido. Este efecto se manifiesta más intensamente cuanto mayor sea la diferencia entre las velocidades de las capas que se encuentran en el centro del tubo y cerca de sus paredes. Observemos que el carácter de la interacción entre las moléculas del líquido y las de las paredes del tubo influye sobre la velocidad del movimiento de las capas que se encuentran cercanas a las paredes. Si el líquido moja al tubo, quiere decir que en tal caso la capa de líquido que se adhiere directamente al tubo, prácticamente no se mueve.

ESTUDIANTE A: ¿Esto significa que en el estado final la temperatura del líquido debe ser algo mayor que en el estado inicial?

PROFESOR: Si. Precisamente. Ahora, cambiemos un poco las condiciones del problema. Supongamos que entre el líquido las paredes del tubo no hay ninguna interacción y por lo tanto todas las capas tienen igual velocidad y la fricción interna no se manifiesta. ¿Cómo es en este caso el proceso de corrimiento del líquido de un recipiente a otro?

ESTUDIANTE A: En este caso la pérdida de energía potencial se debe a la aparición de energía cinética en el líquido. En otras palabras, el estado, representado en la fig. 43, b. no es en este caso un estado de reposo. El líquido debe continuar fluyendo del recipiente de la izquierda al de la derecha. hasta tanto no alcance el estado representado en la fig. 43, c. En estas condiciones la energía potencial del líquido es la misma que en el estado inicial, representado en la fig. 43, a.

PROFESOR: ¿Y qué sucede después con el líquido?

ESTUDIANTE A: Después de esto el líquido empieza a correr en sentido contrario: del recipiente de la derecha al de la izquierda. Como resultado de esto observamos la oscilación de los niveles del líquido en los vasos comunicantes.

PROFESOR: Estas oscilaciones se pueden observar, si llenamos los vasos comunicantes, por ejemplo, con mercurio. Como es sabido, el mercurio no moja el vidrio. Se sobreentiende que con el tiempo estas oscilaciones se amortiguan, puesto que es imposible excluir completamente la interacción de las moléculas del liquido con las moléculas de las paredes del tubo.

ESTUDIANTE A: Veo que la ley de la conservación de la energía se puede utilizar ampliamente.

PROFESOR: Estudiemos otro problema más. En una caja de masa M que cuelga de un hilo delgado, golpea una bala de masa m, que vuela horizontalmente con una velocidad v_0, y se incrusta en la caja. ¿A qué altura H se eleva la caja al desviarse el hilo de su posición de equilibrio por el impacto de la bala (fig. 44)?

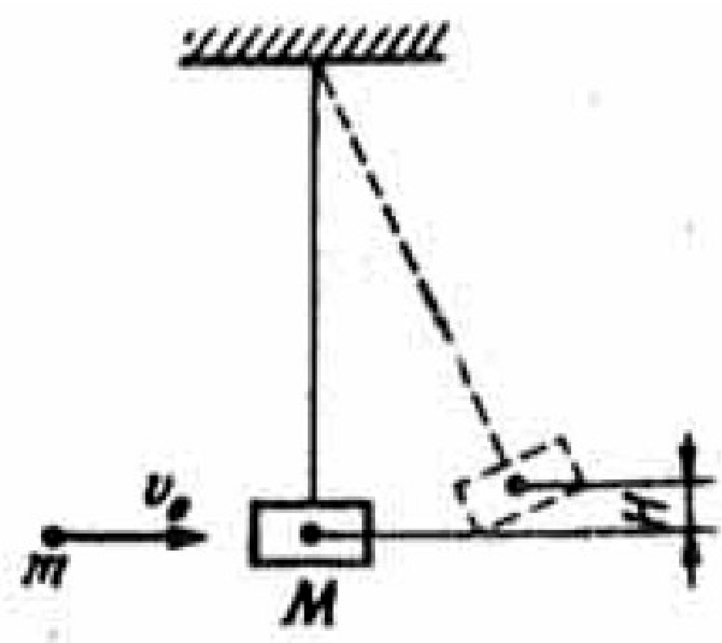


Figura 44

ESTUDIANTE A: Llamemos v_1 a la velocidad de la caja inmediatamente después del impacto. Para encontrar esta velocidad utilicemos la ley de la conservación de la energía

$$mv_0^2/2 = (m + M)v_1^2/2 \qquad (50)$$

de donde

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{m}{m+M}} \qquad (51)$$

Conociendo esta velocidad, encontramos la altura H a que se eleva la caja utilizando nuevamente la ley de la conservación de la energía

$$(m + M)gH = (m + M)v_1^2/2 \qquad (52)$$

Si juntamos las relaciones (50) y (52):

$$(m + M)gh = mv_0^2/2$$

obtenemos

$$H = (v_0^2/2g)m/(m + M) \qquad (53)$$

PROFESOR: (dirigiéndose al estudiante B): ¿Usted cómo piensa?

ESTUDIANTE B: Yo no estoy de acuerdo con la solución que se le da al problema. Nos han hablado de que en casos como éste hay que utilizar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. Por lo tanto, en vez de la fórmula (50) yo utilizaría otra relación:

$$Mv_0 = (m + M)v_1 \qquad (54)$$

(la cantidad de movimiento de la bala antes del impacto es igual a la cantidad de movimiento de la caja con la bala incrustada después del choque). De aquí se deduce, que

$$v_1 = v_0 m/(m + M) \quad (55)$$

Si después de esto utilizamos la ley de la conservación de la energía (52) y colocamos en (52) el resultado (55), obtendremos

$$H = (v_0^2/2g)m^2/(m + M)^2 \quad (56)$$

PROFESOR: Aqui tienen ustedes un ejemplo bien claro de dos opiniones diferentes y de dos resultados diferentes. La esencia de este desacuerdo se basa en que, en un caso, para el choque de la bala contra la caja se utiliza la ley de la conservación de la energía cinética, mientras que en el otro caso se apoya en la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. ¿Quién tiene la razón? (Dirigiéndose al estudiante A): ¿Qué puede usted decir para fundamentar su posición?

ESTUDIANTE A: A mí no se me vino a la cabeza utilizar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento...

PROFESOR: (dirigiéndose al estudiante B): ¿Usted qué opina?

ESTUDIANTE B: No sé en qué basar mi posición. Yo recuerdo que cuando estudiamos los choques, la ley de la conservación de la cantidad de movimiento se cumplía en todos los casos, mientras que la ley de la conservación de la energía no siempre se cumple. Puesto que en el caso dado estas dos leyes conducen a resultados diferentes, entonces, por lo visto, el resultado correcto es justamente el mío.

PROFESOR: Efectivamente su resultado es correcto. Sin embargo, es necesario estudiar mejor este asunto. El choque, después del cual los dos cuerpos que colisionan se mueven en conjunto, es decir, pegados uno a otro (o el uno dentro del otro), se llama «choque absolutamente inelástico». Este choque se caracteriza por la presencia de una deformación permanente, razón por la cual después de su colisión se desprende una cierta cantidad de calor y, por lo tanto, la relación (50), que incluye solamente las energías cinéticas de los cuerpos, es inadmisible. En tal caso, para encontrar la velocidad de la caja con la bala incrustada después del choque es necesario utilizar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento (54).

ESTUDIANTE A: ¿Quiere decir, que para un choque absolutamente inelástico no se cumple la ley de la conservación de la energía? ¡Pero es bien sabido que esto es una ley universal!

PROFESOR: La ley de la conservación de la energía, sin duda, también se cumple durante un choque absolutamente inelástico, pero la energía cinética en este caso no se conserva. Precisamente la energía cinética no permanece constante. mientras que sí se conserva la energía total. Si llamamos Q al calor que se desprende durante el choque, entonces, podemos escribir el siguiente sistema de las leyes de conservación que se refieren al choque absolutamente inelástico que hemos considerado arriba:

$$mv_0 = (m + M)v_2$$
$$mv_0^2/2 = (m + M)v_1^2/2 + Q \qquad (57)$$

La primera de estas ecuaciones expresa la ley de la conservación de la cantidad de movimiento y la segunda la ley de la conservación de la energía (incluyendo no sólo la energía mecánica, sino también el calor desprendido). El sistema de ecuaciones (57) contiene dos magnitudes desconocidas: v_1 y Q. Determinando v_1 de la primera ecuación, se puede utilizar la segunda para encontrar el calor desprendido Q

$$Q = (mv_0^2/2) – (m + M)m^2v_0^2/2(m + M)^2 = (mv_0^2/2)(1 – m/(m + M)) \qquad (58)$$

De aqui podemos ver que cuanto mayor sea la masa M, tanto mayor cantidad de energía se invierte en calor. Y en el límite, cuando la masa ,M se hace infinitamente grande, obtenemos $Q = mv_0^2/2$, es decir toda la energía cinética de la bala se convierte en calor. Esto es completamente natural: suponga usted que una bala se incrusta en la pared.

ESTUDIANTE A: ¿Son posibles los choques sin desprendimiento de calor?

PROFESOR: Sí, estos choques son posibles y reciben el nombre de «choques absolutamente elásticos». Por ejemplo, el choque de dos esferas de acero, con un buen grado de aproximación, se puede considerar como un choque absolutamente elástico. En este caso hay una deformación de las esferas completamente elástica y no hay desprendimiento de calor. Después del choque las esferas recuperan su forma inicial.

ESTUDIANTE A: Es decir, ¿en un choque absolutamente elástico la ley de la conservación de la energía se refiere únicamente a la conservación de la energía cinética?

PROFESOR: Por supuesto.

ESTUDIANTE A: Pero entonces, no entiendo, ¿cómo relacionar entre sí las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía? En efecto, nosotros obtenemos dos ecuaciones diferentes para determinar la velocidad después del choque. ¿O puede suceder que en un choque absolutamente elástico no se cumpla la ley de la conservación de la cantidad de movimiento?

PROFESOR: En un choque absolutamente elástico se cumplen las dos leyes de la conservación: tanto de la cantidad de movimiento como de la cantidad de energía cinética. No hay motivos para preocuparse en «amistar» estas leyes, puesto que en un choque absolutamente elástico los cuerpos se separan moviéndose con diferentes velocidades. Si después de un choque absolutamente inelástico los cuerpos que colisionan se mueven con una misma velocidad (por cuanto se juntan), después de un choque elástico cada cuerpo se mueve con su propia velocidad, y para encontrar las dos incógnitas se necesitan precisamente las dos ecuaciones. Veamos un ejemplo. Un cuerpo de masa m se mueve con una velocidad v_0 y choca en forma elástica con otro cuerpo de masa M que se encuentra en reposo. Supongamos que como resultado del choque el primer cuerpo es rechazado hacia atrás. Llamaremos v_1 a la velocidad del cuerpo de masa M después del choque y v_2 a la velocidad del cuerpo M. En este caso las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía se puede escribir en la forma siguiente:

$$mv_0 = Mv_2 — mv_1$$

$$mv_0^2 = Mv_2^2 + mv_1^2/2 \qquad (59)$$

Quiero que presten su atención al signo menos de la primera ecuación. Este aparece, puesto que hemos supuesto que el cuerpo que choca es rechazado y después del choque se mueve en sentido contrario.

ESTUDIANTE B: Pero no siempre es sabido con anticipación en qué dirección se moverá el cuerpo después del choque. Acaso. ¿no puede suceder que después del choque el cuerpo m continúe moviéndose en la misma dirección anterior pero con menor velocidad?

PROFESOR: Es posible. En este caso, al resolver el sistema de ecuaciones (59), obtenemos una velocidad v_1 negativa.

ESTUDIANTE B: Yo pienso, que la dirección del movimiento del cuerpo m después del choque se determina por la relación entre las masas m y M.

PROFESOR: Exactamente. Si $m<M$, el cuerpo m rebota hacia atrás; para $m = M$, el cuerpo m se detiene después del choque, y para $m > M$, continúa moviéndose en la misma dirección pero con una velocidad menor. Sin embargo, en un caso general, usted puede despreocuparse de la dirección del movimiento. Es suficiente suponer cierta dirección y empezar los cálculos y luego el signo de la respuesta indicará su error.

ESTUDIANTE B: Es sabido, que después de chocar dos esferas, éstas pueden salir disparadas formando un cierto ángulo, mientras que aquí hemos supuesto que el movimiento se lleva a cabo sobre una misma recta. ¿Esto no indica que hemos considerado un caso particular?

PROFESOR: Si, lo que usted dice es cierto. Nosotros hemos analizado el caso particular de un choque central: las esferas se mueven antes del choque y después de éste a lo largo de la recta que pasa por sus centros. El caso más general de un choque «no central» lo estudiaremos más adelante. Ahora quisiera saber si ustedes han entendido bien mis explicaciones.

ESTUDIANTE A: Yo, por ejemplo, entendí. Según he comprendido, en cualquier clase de choque (elástico o inelástico) se cumplen dos leyes: la ley de la conservación de la cantidad de movimiento y la de la energía. Simplemente, para diferentes clases de choques existen diferentes formas de ecuaciones para describir las leyes de la conservación. En el análisis de los choques inelásticos además de la energía mecánica hay que tener en cuenta el calor desprendido en la colisión. **PROFESOR:** Su observación es justa.

ESTUDIANTE B: Según entiendo, los choques absolutamente elástico y absolutamente inelástico representan dos casos extremos. ¿Siempre podemos hacer uso de ellos al describir los choques reales?

PROFESOR: Si, es verdad. La clase de choques que hemos estudiado son casos extremos. En los casos reales siempre hay desprendimiento de una cierta cantidad de calor (deformaciones idealmente elásticas no existen) y como resultado de esto, los cuerpos que chocan pueden separarse con diferentes velocidades.

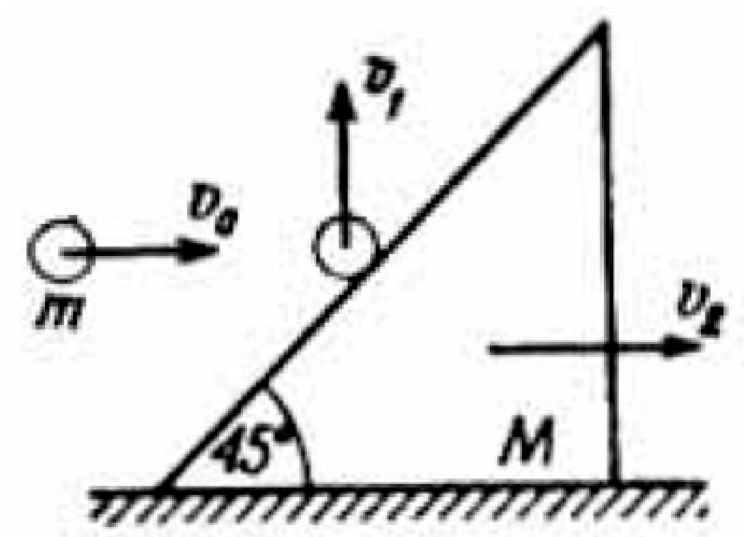


Figura 45

Sin embargo, un buen número de casos reales se pueden describir bastante bien con ayuda de estos modelos simples: absolutamente elástico y absolutamente inelástico. Estudiemos un ejemplo de un choque elástico no central. *Sobre un plano horizontal descansa un cuerpo que tiene forma de plano inclinado con un ángulo de inclinación igual a 45°. Con este cuerpo de masa M choca (elásticamente) una bola, de masa m, que fue lanzada horizontalmente con una velocidad v_0. Como resultado del choque, la bola rebota hacia arriba con dirección vertical, mientras que el cuerpo M empieza a deslizar sin rozamiento a lo largo del plano horizontal. Encontrar la velocidad con la cual la bola empieza su movimiento vertical después del choque* *(fig. 45).* ¿Quién de ustedes desea comprobar sus conocimientos en la resolución de este problema?

ESTUDIANTE B: Permíteme probar. Llamemos v_1 a la velocidad de la bola que buscamos y v_2 a la velocidad del cuerpo M. Por cuanto el choque es elástico, tengo derecho a considerar que la energía cinética se conserva:

$$mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + Mv_2^2/2 \qquad (60)$$

Necesito una ecuación más y para establecerla sin duda debo utilizar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. Escribo esta ecuación en la forma

$$mv_0 = Mv_2 + mv_1 \qquad (61)$$

En realidad, no estoy seguro de esta ecuación, puesto que las direcciones de v_1 y v_2 forman un ángulo recto.

PROFESOR: La ecuación (60) es correcta, mientras que la ecuación (61), como usted lo supone, es falsa. No hay que olvidar, que la ley de la conservación de la cantidad de movimiento es una igualdad vectorial, puesto que la cantidad de movimiento es una magnitud vectorial que tiene la misma dirección que la velocidad. Es cierto que en el caso cuando todas las velocidades están dirigidas a lo largo de una misma recta, esta igualdad vectorial la podemos escribir en forma escalar. Precisamente así lo hicimos cuando se trataba de un choque central. En caso general, es necesario descomponer las velocidades en dos ejes perpendiculares entre sí y escribir la ley de la conservación de la cantidad de movimiento por separado para cada uno de los ejes (si el problema se analiza en el plano, entonces la igualdad vectorial se puede reemplazar por dos igualdades escalares para las proyecciones del vector de la cantidad de movimiento sobre los dos ejes perpendiculares entre sí).

En el problema dado escogemos los ejes horizontal y vertical. En la dirección horizontal la ley de la conservación de la cantidad de movimiento tiene el siguiente aspecto:

$$mv_0 = Mv_2 \qquad (62)$$

A partir de las ecuaciones (60) y (62) encontramos la velocidad v_1 que buscamos

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{(M-m)}{M}}$$

ESTUDIANTE B: ¿Y en la dirección vertical qué hacemos?

PROFESOR: A primera vista, parece que en el eje vertical no se cumple la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. En realidad, antes del choque no había velocidades en el eje vertical, mientras que después del choque se tiene una cantidad de movimiento mv_1, en dirección vertical. No es difícil comprender que en el problema dado actúe un cuerpo más: la Tierra. Es decir, si la Tierra no actuara, el cuerpo M no se movería horizontal, después de! choque. Llamemos M, a la masa de la Tierra y v_1 a la velocidad que adquiere la Tierra después del choque. La falta de fricción permite considerar, que la interacción del cuerpo M con la superficie de la Tierra se realiza solamente en dirección vertical, o dicho de otra manera, la velocidad de la Tierra v_1 está dirigida verticalmente hacia abajo. De esta manera, la presencia de la Tierra en nuestro problema no hace variar el aspecto de la ecuación (62), pero conduce a la ecuación, que expresa la ley de la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección vertical:

$$mv_1 — M_1v_1 = 0 \qquad (63)$$

ESTUDIANTE B: Si en el problema incluimos la Tierra, evidentemente, que tendremos que corregir la relación energética (60).

PROFESOR: ¿Qué corrección exactamente quiere usted hacer?

ESTUDIANTE B: Quiero agregar el sumando, relacionado con el movimiento de la Tierra después del choque

$$mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + Mv_2^2/2 + M_1v_1^2/2 \qquad (64)$$

PROFESOR: La corrección que usted introduce es lógica. Sin embargo, no hay necesidad de corregir la relación (60). En realidad, a partir de la fórmula (63) concluimos que la velocidad de la Tierra es igual a

$$v_t = mv_1/M_t$$

Puesto que la masa M_t es demasiado grande, digamos infinita, podemos considerar que la velocidad de la Tierra v_t es prácticamente nula. Ahora escribamos el sumando $M_t v_t^2/2$ en la ecuación (64) en la forma $(M_t v_t)v_t/2$. La magnitud $M_t v_t$, en este producto tiene un valor finito de acuerdo con la relación (63). Si multiplicamos dicho valor por cero (en nuestro caso por v_t), obtenemos nuevamente cero. De aqui concluimos, que la Tierra toma parte en este problema de una manera muy peculiar: al recibir cierta cantidad de movimiento, ella prácticamente no recibe energía. En otras palabras, la Tierra interviene en la ley de la conservación de la cantidad de movimiento y no interviene en la ley de la conservación de la energía. Este factor constata de manera especial el hecho de que las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía son esencialmente diferentes e independientes entre sí.

PROBLEMAS

22. Un cuerpo de 3 kg de masa cae desde cierta altura con una velocidad inicial de 2 ms, dirigida verticalmente hacia abajo. Calcular el trabajo realizado durante 10 segundos contra las fuerzas de resistencia, si se sabe que al final de este intervalo de tiempo, el cuerpo adquiere una velocidad igual a 50 m/s. La fuerza de resistencia se considera constante.

23. Un cuerpo desliza: primero a lo largo de un plano inclinado un ángulo de 30° y luego continúa moviéndose sobre el plano horizontal. Determinar el coeficiente de rozamiento, si se sabe que el cuerpo recorre en el plano horizontal la misma distancia que en el plano inclinado.

24. Calcular el coeficiente de trabajo útil de un plano inclinado, cuando a lo largo de éste desliza un cuerpo uniformemente.

25. Una esfera de masa m y volumen V cae al agua desde una altura H, se hunde una longitud h y luego rebota (la densidad de la esfera es menor que la del agua). Encontrar la resistencia del agua, suponiendo que es constante, y la altura h a la que se eleva la esfera cuando salta del agua. Se desprecia la resistencia de aire.

26. Un vagón de 50 t de masa se mueve con una velocidad igual a 12 km/h y choca contra una plataforma de 30 t de masa que se encuentra en la vía. Encontrar la velocidad del movimiento en conjunto del vagón y la plataforma, justamente después de que empiece a funcionar el enganche automático. Calcular la distancia, recorrida por el vagón y la plataforma después del embrague, si la fuerza de resistencia es igual al 5 % del peso.

27. De un cañón cuya masa es M y que se encuentra en el pie de un plano inclinado, se dispara en dirección horizontal un proyectil de masa m y con una velocidad inicial igual a v_0. ¿A qué altura subirá el cañón a lo largo del plano inclinado, como resultado de la repercusión, si el ángulo de inclinación del plano inclinado es igual a α y el coeficiente de fricción entre el cañón y el plano es igual a k?

28. Dos esferas de masa M y 2M penden de un mismo punto y de hilos de longitud igual a l. La esfera de masa M es separada un ángulo α con respecto al eje vertical y luego se la deja libre, comunicándole una velocidad tangencial igual a v_0 y dirigida hacia la posición de equilibrio. ¿A qué altura se elevarán las esferas después de chocar, si

1. el choque es absolutamente elástico,
2. el choque es absolutamente inelástico (las esferas después del choque se quedan pegadas)?

29. Una esfera de masa M pende de un hilo de longitud l. La esfera es golpeada horizontalmente por un proyectil de masa m y que se introduce en ella. ¿Cuál debe ser la velocidad mínima del proyectil para que después de golpear la esfera, ésta alcance a realizar un ciclo completo en el plano vertical?

30. En un plano horizontal descansan dos cuñas cuyos ángulos de inclinación son iguales a 45° y la masa de cada una de ellas es igual a M (fig. 46).

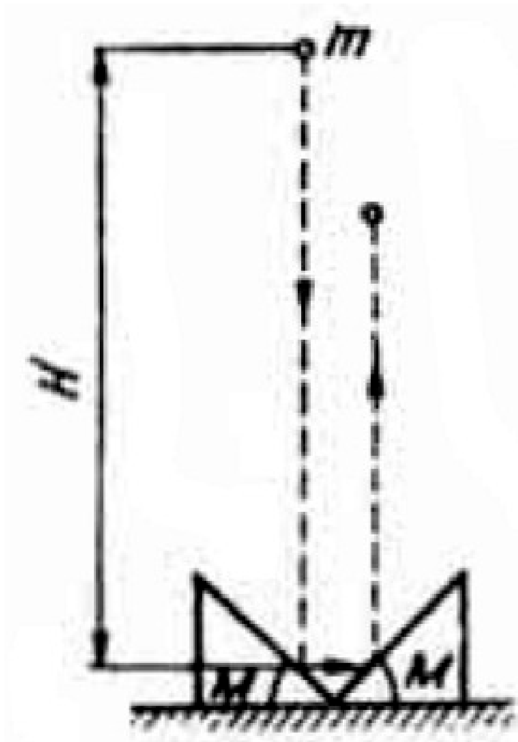
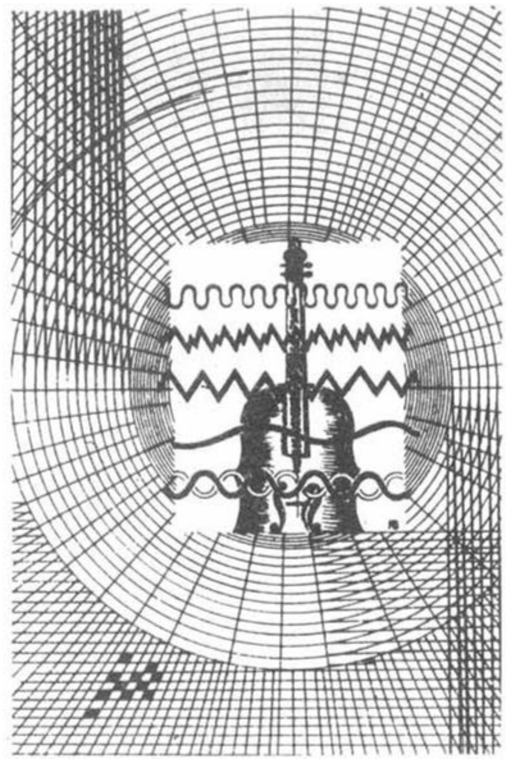


Figura 46

Desde una altura H cae libremente una esferita de masa m (m « M), que golpea primero a una cuña, luego a la otra y rebota verticalmente hacia arriba. Encontrar la altura a la cual rebota la esferita. Tener en cuenta que ambos choques son elásticos y que no hay fricción entre las cuñas y el plano.

31. En un plano horizontal descansa una cuña cuyo ángulo de inclinación es igual a 30°, y su masa, igual a M. Desde, una altura H cae libremente una esferita de masa m y después de golpear en forma elástica a la cuña, rebota formando un ángulo de 30° con la horizontal. ¿A qué altura se elevará la esferita? Despreciar la fricción entre la cuña y el plano.

Capítulo 6



El mundo que rodea al hombre está lleno de oscilaciones y ondas, ¡Recuerde esto al estudiar los capítulos de la Física dedicados a estos fenómenos! Analizaremos un estudio de las oscilaciones armónicas y como caso particular analizaremos las oscilaciones de un péndulo simple. Investigaremos, además el comportamiento de un péndulo en sistemas no inerciales.

§ 11. ¿SADE USTED ANALIZAR LAS OSCILACIONES ARMÓNICAS?

PROFESOR: Un buen número de estudiantes se presenta a los exámenes sin tener un concepto claro acerca de las oscilaciones armónicas. Por esto, ante todo, trataremos de definir este tipo de oscilaciones.

ESTUDIANTE A: Se llaman oscilaciones armónicas a todas aquellas que obedecen a una ley representada por una función sinusoidal: la distancia x que se desvía el cuerpo de su posición de equilibrio varía con el tiempo de la siguiente manera:

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) \qquad (65)$$

En esta fórmula A es la amplitud de las oscilaciones (desviación máxima o alargamiento máximo del cuerpo respecto a su posición de equilibrio), ω es la frecuencia circular ($\omega = 2\pi/T$, donde T es el período de las oscilaciones), α es la fase inicial (ésta indica la desviación del cuerpo de su posición de equilibrio en el instante t = 0). Las oscilaciones armónicas se pueden considerar como el movimiento de la proyección de un punto, que se mueve uniformemente en una circunferencia de radio A con una velocidad angular ω (figura 47).

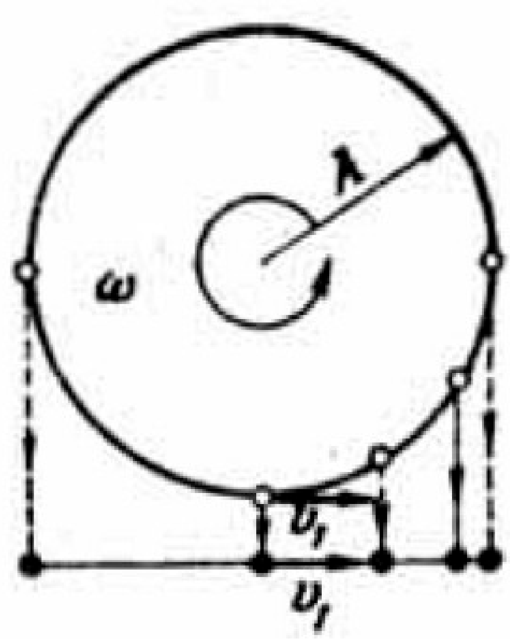


Figura 47

ESTUDIANTE B: Yo prefiero otra definición de las oscilaciones armónicas. Como se sabe, las oscilaciones se producen por la acción de una fuerza restitutoria, es decir, una fuerza dirigida hacia la posición de equilibrio y que aumenta a medida que el cuerpo se aleja de su posición de equilibrio, así pues, se llaman armónicas a las oscilaciones para las cuales la fuerza restitutoria F es directamente proporcional a la elongación x del cuerpo:

$$F = kx \qquad (66)$$

Una fuerza de este tipo se denomina elástica».

PROFESOR: Las dos definiciones que Uds. presentan me satisfacen completamente En el primer caso las oscilaciones armónicas se definen por la ley que las describe y en el segundo caso, por la causa que las produce. Dicho de otra manera, si la primera definición utiliza una descripción de las oscilaciones en las coordenadas espacio-tiempo (cinemática), la segunda describe la causa (dinámica).

ESTUDIANTE B: Pero, ¿cuál de las definiciones se prefiere? ¿O, tal vez las dos son equivalentes?

PROFESOR: No, no son equivalentes y se prefiere la primera (cinemática) que es más completa.

ESTUDIANTE B: Si, el carácter de la fuerza restitutoria determina el carácter de las oscilaciones. No entiendo entonces, por qué mi definición es menos completa.

PROFESOR: Usted está un poco equivocado, el carácter de la fuerza restitutoria no determina totalmente el carácter de las oscilaciones.

ESTUDIANTE A: Me parece que aquí hay que recordar que el carácter del movimiento de un cuerpo en un instante dado no solamente se define por el carácter de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en ese momento, sino también por las condiciones iniciales, es decir, por la posición y velocidad del cuerpo en el momento inicial. Nosotros ya discutimos esto anteriormente en el § 4.

PROFESOR: Exactamente. Para aplicarse al caso que estamos analizando, esta afirmación quiere decir que el carácter de las oscilaciones no solamente lo determina la fuerza restitutoria sino también aquellas condiciones que se tenían cuando el cuerpo empieza a oscilar. Es evidente que las oscilaciones las podemos provocar de diferentes maneras. Por ejemplo, podemos desviar el cuerpo de su posición de equilibrio una cierta distancia y luego lo soltamos sin ningún empuje inicial, el cuerpo empezará a oscilar. Si tomamos el tiempo t = 0 como el momento inicial de las oscilaciones entonces de (65) obtenemos que $\alpha = \pi/2$ y la distancia que representa de la desviación máxima del cuerpo será igual a la amplitud de las oscilaciones. Podemos desviar el cuerpo a diferentes distancias de la posición de equilibrio y con ello le daremos diferentes amplitudes a las oscilaciones.

Otra manera de provocar las oscilaciones consiste en comunicarle una cierta velocidad inicial a un cuerpo que se encuentra en su posición de equilibrio; el cuerpo empezará a oscilar. Si hacemos el momento inicial de las oscilaciones igual a cero (65) obtenemos que α = 0. En este caso, según las velocidades iniciales que le comuniquemos al cuerpo, obtendremos oscilaciones con diferentes amplitudes.

Es evidente que se pueden proponer un sinnúmero de métodos de provocar oscilaciones que son intermedios a los dos casos extremos ya señalados: el cuerpo es desviado de la posición de equilibrio y al mismo tiempo se le comunica cierto impulso Cada uno de estos métodos conducirá a determinados valores de la amplitud A y de la fase inicial a de las oscilaciones.

ESTUDIANTE B: ¿Es decir, que las magnitudes A y α no dependen del carácter de la fuerza restitutoria?

PROFESOR: Precisamente Uds. disponen de estas magnitudes al provocar las oscilaciones por uno u otro método. La fuerza restitutoria, o más concretamente, el coeficiente k de la fórmula (66) determina solamente la frecuencia circular o dicho en otras palabras, el período de las oscilaciones del cuerpo. Se puede afirmar que el período de las oscilaciones es una característica propia del cuerpo que oscila, mientras que la amplitud A y la fase inicial α dependen de las condiciones exteriores que provocaron las oscilaciones consideradas. Regresando a las definiciones de oscilaciones armónicas vemos que la definición dinámica no contiene ninguna información acerca de la amplitud o de la fase inicial de las oscilaciones, mientras que la definición cinemática contiene información acerca de estas magnitudes.

ESTUDIANTE B: ¿Pero si podemos disponer de la amplitud según nuestro criterio, entonces ésta no debe ser una característica demasiado importante para un cuerpo que oscila?

PROFESOR: Ud. se equivoca. La amplitud es una característica muy importante para un cuerpo que oscila. Para demostrar esto, veamos un ejemplo concreto: una bolita de masa m está sujeta a dos resortes elásticos y realiza oscilaciones armónicas de amplitud A sobre el eje horizontal (figura 48).

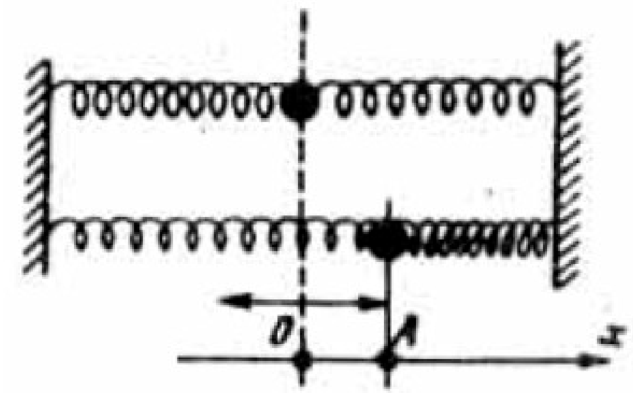


Figura 48

La fuerza restitutoria se determina por el coeficiente de elasticidad k, que caracteriza las propiedades elásticas de los resortes. Se pide encontrar la energía de la bolita que oscila.

ESTUDIANTE A: Para encontrar la energía de la bolita se analiza la posición de la máxima desviación (x = A). En esta posición la velocidad de la bolita es igual a cero, y por lo tanto su energía total es igual a su energía potencial, la cual se determina por el trabajo realizado contra la fuerza restitutoria F al desviar la bolita una distancia A de su posición de equilibrio, es decir,

$$W = FA \quad (67)$$

De acuerdo con (66) F = kA, obtenemos

$$W = kA^2$$

PROFESOR: Ud. razonó correctamente, pero cometió un error. La fórmula (67) se emplea solamente en caso de que la fuerza sea constante. Sin embargo, en el ejemplo considerado la fuerza F varía con la distancia, como está indicado gráficamente en la figura 49.

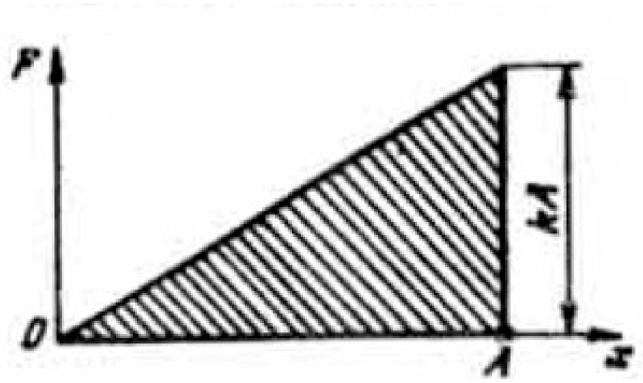


Figura 49

El trabajo de esta fuerza para la distancia x = A es igual al área rayada bajo la gráfica de la fuerza. Esta es el área de un triángulo igual a $kA^2/2$. Por lo tanto,

$$W = kA^2/2 \qquad (68)$$

Quiero hacer notar que la energía total de un cuerpo que vibra es proporcional al cuadrado de la amplitud de las oscilaciones. De ahí podemos ver que en realidad la amplitud es una característica muy importante de un cuerpo que oscila. Si $0<x<A$, la energía total W es la suma de los dos términos que corresponden a la energía cinética y a la energía potencial

$$W = kA^2/2 = mv^2/2 + kx^2/2 \qquad (69)$$

La relación (69) permite determinar la velocidad v que tiene la bolita que vibra cuando se encuentra a una distancia x de la posición de equilibrio. Ahora hacemos la siguiente pregunta: ¿Cuál es el período de las oscilaciones de la bolita representada en la figura 48?

ESTUDIANTE B: Para establecer la fórmula del período de las oscilaciones hay que utilizar el cálculo diferencial.

PROFESOR: Rigurosamente hablando Ud. tiene razón. Sin embargo, si se utilizan simultáneamente las definiciones cinemática y dinámica de las oscilaciones armónicas se puede obrar sin cálculo diferencial. En realidad, a partir de la figura

47, que es la representación gráfica de la definición cinemática, se concluye, que la velocidad en el instante en que la bolita pasa por su posición de equilibrio es

$$v_1 = \omega A = 2\pi A/T \qquad (70)$$

Utilizando la fórmula (68), que resulta de la definición dinámica, se puede concluir que la velocidad v puede calcularse a partir de la relación energética

$$mv_1^2/2 = kA^2/2 \qquad (71)$$

(al pasar por la posición de equilibrio la energía total de la bolita es su energía cinética). Juntando (70) y (71) obtenemos $4\pi^2A^2m/T^2 = kA^2$, de donde

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (72)$$

Como ya se dijo, el período de las oscilaciones se determina totalmente a partir de las propiedades del mismo sistema oscilante y no depende del método empleado para provocar las oscilaciones.

ESTUDIANTE A: Generalmente, estudiamos las oscilaciones de un péndulo y no las de una bola atada a un resorte. ¿No se podría aplicar los resultados obtenidos para el caso de un péndulo?

PROFESOR: Para poder hacer esta generalización es necesario antes aclarar cuál es la naturaleza del coeficiente de elasticidad k en el caso de un péndulo, ya que en realidad un péndulo no oscila por acción de la fuerza elástica sino por la acción de la fuerza gravitatoria. Veamos una pequeña bola que pende de un hilo cuya longitud es l. Desviamos al hilo de su posición de equilibrio un ángulo α (figura 50). Sobre la bolita actúan das fuerzas: la fuerza de gravedad mg y la tensión T del hilo. La resultante de estos dos es la fuerza restitutoria. De la figura se ve fácilmente que dicha fuerza es igual a mg sen α.

ESTUDIANTE A: ¿Y qué se debe tomar como desviación de la posición de equilibrio en el case del péndulo, el segmento AB o el segmento AC (ver figura 50)?

PROFESOR: Estamos estudiando las oscilaciones armónicas de un péndulo. Para ello es necesario que el ángulo de desviación máxima del hilo respecto a la posición de equilibrio sea lo suficientemente pequeño:

$$\alpha \ll l \qquad (73)$$

(hago notar que aquí el ángulo α está expresado en radianes; si utilizamos grados, este ángulo de todos modos no debe ser mayor de 10°)

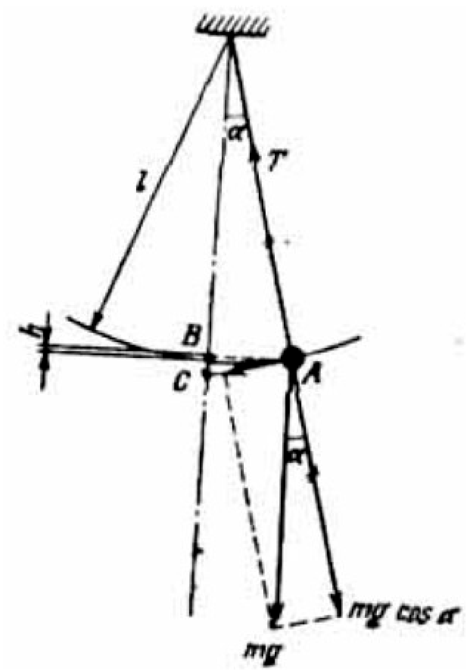


Figura 50

Cuando se cumple la condición (73) se puede despreciar la diferencia que existe entre los segmentos AB y AC

$$AB = l \text{ sen } \alpha \approx AC = l \text{ tg } \alpha$$

De esta forma su pregunta no tiene mayor importancia. Para el cálculo escogemos: $x = AB = l$ sen α. Después de lo cual la relación (66) para un péndulo adquiere la siguiente forma:

$$mg \text{ sen } \alpha = kl \text{ sen } \alpha \quad (66a)$$

de donde hallamos que

$$k = mg/l \quad (74)$$

Colocando esta igualdad en (72) obtenemos la fórmula para el período de las oscilaciones armónicas de un péndulo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (75)$$

Averigüemos también cuál es la energía del péndulo. Su energía total, evidentemente, es igual a mgh, donde h es la altura a la cual se eleva el péndulo en su posición extrema (ver figura 50). De esta manera

$$W = mgh = mgl(1 - \cos\alpha) = 2mgl\, sen^2\, {}^{\alpha}\!/_{2} \quad (76)$$

La relación (76) sirve para cualquier ángulo α. Para llevar este resultado a la forma (68), es necesario que se cumplan las condiciones de existencia de las oscilaciones armónicas del péndulo, es decir, se debe cumplir la igualdad (73). En este caso el sen α se puede reemplazar aproximadamente por el valor del ángulo expresado en radianes, después de lo cual la fórmula (76) toma la forma

$$W \approx 2mgl\,(\alpha/2)^2 = mgl\,\alpha^2/2$$

De aquí teniendo en cuenta la expresión (74), obtenemos

$$W = k(l\alpha)^2/2 \approx k\,(AB)^2/2$$

de esta manera hemos llegado al resultado (68).

ESTUDIANTE B: Según recuerdo, las oscilaciones de los péndulos, anteriormente, las estudiamos, como regla, sin considerar pequeño al ángulo de desviación.

PROFESOR: Esta condición no se necesita si se trata de la energía de la bolita o de la tensión del hilo. En ese caso se analiza el movimiento circular de la bolita en el plano vertical y no del péndulo. Sin embargo, si en el problema figura la fórmula (75) para el período de las oscilaciones, éstas deben ser necesariamente armónicas y, por consiguiente, el ángulo de desviación del hilo debe ser pequeño. Así, por ejemplo, en el problema N° 33 no tiene importancia el hecho de que el ángulo de desviación sea pequeño mientras que en el problema N° 34 esta condición es importantísima.

PROBLEMAS

32. Una esfera ejecuta oscilaciones armónicas, en la forma indicada en la figura 48. Encontrar la razón entre las velocidades de la esfera en los puntos, alejados de la posición de equilibrio una distancia igual a la mitad y a la tercera parte de la amplitud, respectivamente.

33. Una esfera, que pende de un hilo es apartada de la posición de equilibrio un ángulo de 60° y luego se suelta. Encontrar la razón entre las tensiones del hilo en las posiciones de equilibrio y de elongación máxima de la esfera.

34. Un péndulo simple es inclinado un ángulo de 5°. Encontrar la velocidad de la esfera del péndulo cuando pasa por la posición de equilibrio, si la frecuencia circular de las oscilaciones es igual a $2s^{-1}$

§12. ¿QUE OCURRIRÍA CON UN PÉNDULO EN ESTADO DE IMPONDERABILIDAD?

PROFESOR: Del techo de un ascensor colgamos un hilo de longitud l y a su extremo atamos una bolita y la hacemos oscilar en forma armónica. Supongamos que el ascensor se mueve hacia arriba con una aceleración a. ¿A qué es igual el período de las oscilaciones del péndulo?

ESTUDIANTE A: Cuando nos elevamos en el ascensor con aceleración, experimentamos cierto aumento de peso. Me parece que un fenómeno semejante debe suceder con el péndulo. Creo que el período de sus oscilaciones en este caso se determina por la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} \quad \text{.....(77)}$$

Sin embargo, no puedo dar un fundamento riguroso a esta fórmula.

PROFESOR: Su fórmula es correcta, pero para demostrarla debemos basarnos en un argumento poco común para nosotros. Hasta ahora nos hemos referido al movimiento de los cuerpos en sistemas inerciales de referencia sin analizarlo en sistemas no inerciales. Más aún, ya les previne contra el uso de sistemas de referencia no inerciales, ver § 4. Sin embargo, en este párrafo es más razonable utilizar precisamente un sistema no inercial de referencia que en nuestro caso tomaremos con relación al ascensor acelerado. Les recuerdo que cuando se hace el análisis del movimiento de un cuerpo de masa m en un sistema no inercial de referencia con aceleración a, es necesario aplicarle formalmente al cuerpo una fuerza complementaria, llamada fuerza inercial, que es igual a ma y está dirigida en sentido contrario a la aceleración.

Después de aplicarle al cuerpo la fuerza inercial se puede hacer caso omiso de la aceleración del sistema y analizar el movimiento de la misma forma que en un sistema inercial. En nuestro caso hay que aplicarle a la bolita una fuerza complementaria igual a ma, la cual, como la fuerza de gravedad mg, sea constante en valor y dirección y cuyo sentido sea el mismo que el de la fuerza de gravedad. De esto deducimos que en la expresión (75) hay que escribir, en lugar de la aceleración g, la suma aritmética de las aceleraciones (g + a). Como resultado obtenemos la fórmula (77).

ESTUDIANTE A: ¿Es decir, que si el ascensor se mueve con una aceleración a, dirigida hacia abajo, el período del péndulo se determinará por la diferencia de las aceleraciones (g — a), puesto que ahora la fuerza de inercia ma estará dirigida en sentido contrario a la fuerza de gravedad?

PROFESOR: Exactamente. En este caso el período del péndulo es igual a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}} \qquad (78)$$

Esta fórmula tiene sentido si a < g. Cuanto más próximo sea el valor de a al de g, mayor será el período de las oscilaciones del péndulo. Para a = g se llega al estado de imponderabilidad. ¿Qué ocurre entonces con el péndulo?

ESTUDIANTE A: En este caso, según la fórmula (78), el período de las oscilaciones tiende a un valor infinito. Esto quiere decir que el péndulo queda inmóvil.

PROFESOR: Quiero precisar mejor su respuesta. Tenemos que el péndulo oscila dentro del ascensor, De pronto, el ascensor se desprende y empieza a caer libremente hacia abajo (despreciamos la resistencia del aire). ¿Qué sucederá con el péndulo?

ESTUDIANTE A: Como ya lo he dicho, el péndulo se detiene.

PROFESOR: Su respuesta no es completamente exacta. El péndulo en realidad quedará inmóvil (se sobreentiende que con relación al ascensor), si al desprenderse el ascensor, el péndulo se encontraba en su posición extrema. Si esto no se cumple, entonces, en el estado de imponderabilidad, la bolita girará uniformemente, colgada del hilo, en el plano vertical y con la velocidad que tenía en el instante en que se desprendió el ascensor.

ESTUDIANTE A: Ahora comprendo.

PROFESOR: En ese caso, describa en una gráfica el comportamiento de un péndulo simple que se encuentra dentro de una nave cósmica en estado de imponderabilidad.

ESTUDIANTE A: Dentro de una nave cósmica la bolita del péndulo simple, o bien permanecerá en reposo (con relación a la nave), o bien girará uniformemente en una circunferencia cuyo radio es igual a la longitud del hilo (por supuesto si no se lo impiden ni las paredes ni el techo.

PROFESOR: Su descripción es incompleta. Supongamos que también nosotros estamos dentro de la nave cósmica en estado de imponderabilidad. Colguemos el hilo con la bolita de tal forma que ni las paredes ni el techo de la nave impidan el movimiento del péndulo. Después de esto soltamos con cuidado la bolita. Esta permanecerá inmóvil. En estas condiciones distinguiremos dos casos:

1. el hilo no está tenso
2. el hilo está tenso

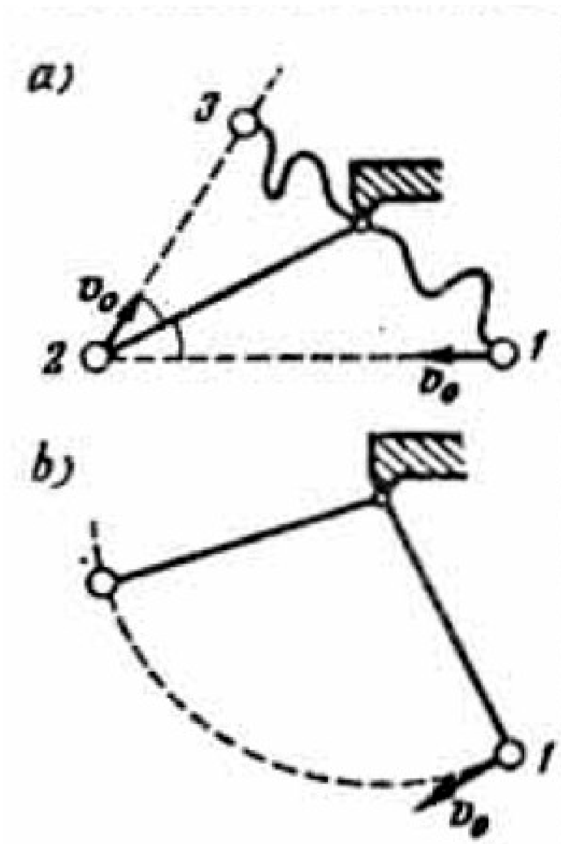


Figura 51

Analicemos el primer caso (posición 1 de la figura 51, a). Comunicamos a la bolita cierta velocidad v_0. Como resultado de esto, la bolita se moverá uniformemente y en línea recta hasta que el hilo del cual está atada no quede tenso (posición 2 en la figura 51, a). En ese instante, sobre la bolita actúa la reacción del hilo, la cual se puede considerar análoga a la fuerza de reacción que una pared ofrece a una pelota que choca contra ella. En consecuencia, la bolita cambia bruscamente la dirección de su movimiento, el cual será nuevamente uniforme y rectilíneo (posición 3 en la figura 51, a). En este caso peculiar de reflexión debe cumplirse la ley de la igualdad de los ángulos de «incidencia» y de reflexión. Estudiemos ahora el segundo caso: primero tiramos del hilo hasta que quede tenso y luego cuidadosamente soltamos la bolita de nuestras manos. Como en el caso anterior, la bolita continuará inmóvil pendiendo del hilo en una posición fija (posición 1 en la figura 51, b). Si ahora a la bolita le comunicarnos cierta velocidad v_0 en la dirección perpendicular al hilo, aquélla empezará a girar uniformemente en el plano determinado por el hilo y el vector de la velocidad v_0.

Veamos el siguiente problema. *Una cuerda de longitud l, con una bolita en uno de sus extremos, cuelga de una carreta que desliza sin fricción sobre un plano inclinado con un ángulo de inclinación α (figura 52, a). Se pide determinar el período de las oscilaciones del péndulo, el cual, en este caso, se encuentra en un sistema que se mueve con cierta aceleración.*

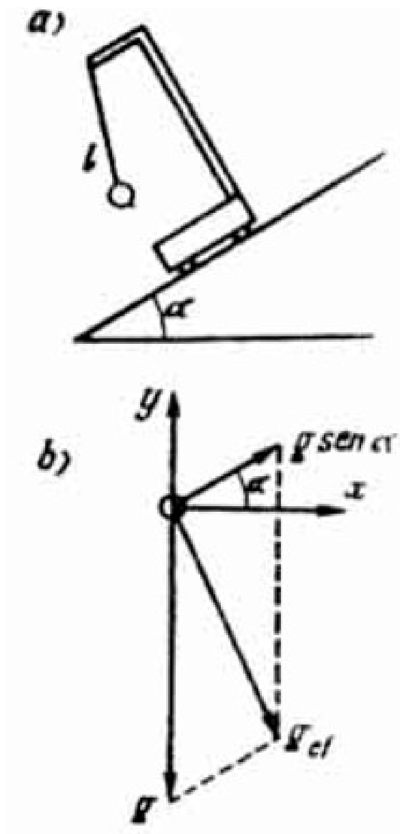


Figura 52

Sin embargo, a diferencia de los problemas anteriores con el ascensor, en este último, la dirección de la aceleración del sistema forma cierto ángulo con la dirección de la aceleración de la gravedad. Por esta razón, en el problema puede hacerse una pregunta complementaria ¿cuál es la dirección de la cuerda del péndulo en su posición de equilibrio?

ESTUDIANTE A: Yo antes traté de resolver este problema. pero me confundí.

PROFESOR: El período de las oscilaciones del péndulo en este caso está dado por la fórmula (75), en la cual en lugar de g, se debe utilizar cierta aceleración efectiva (llamémosla g_{ef}), como en el caso del ascensor, igual a la suma vectorial de la aceleración de la gravedad y de la aceleración del sistema dado. Además, hay que tener en cuenta que en la suma indicada el vector de la aceleración de la carreta debe figurar con signo contrario, ya que la fuerza de inercia está dirigida en sentido contrario al de la aceleración del sistema. Los vectores de las aceleraciones están representados en la figura 52, b en donde se tiene en cuenta que la aceleración de la carreta es igual a g sen α. Determinemos g_{ef}

$$g_{ef} = \sqrt{g_{ef.x}^2 + g_{ef.y}^2}$$

$$g_{ef} = \sqrt{(g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)^2 + (g - g \sin^2 \alpha)^2} = g \cos \alpha \qquad (79)$$

de donde encontramos que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}} \qquad (80)$$

ESTUDIANTE A: ¿Y cómo determinar la dirección de la posición de equilibrio de la cuerda?

PROFESOR: Dicha dirección es la misma dirección de la aceleración efectiva g_{ef}. A partir del resultado (79), no es difícil deducir, que esta dirección forma con el eje vertical un ángulo α. O dicho de otra manera, en la posición de equilibrio, la cuerda del péndulo en la carreta que rueda por un plano inclinado queda perpendicular a éste.

ESTUDIANTE B: ¿Y no se podría obtener el último resultado de otro modo?

PROFESOR: Se puede obtener este resultado directamente, analizando el equilibrio de la bolita con relación a la carreta. Sobre la bolita están aplicadas las siguientes fuerzas: su peso mg, la tensión de la cuerda T y la fuerza de inercia ma (figura 53). Llamemos β al ángulo formado por la cuerda y la vertical.

Descompongamos las fuerzas indicadas, en los ejes horizontal y vertical y luego escribamos las condiciones de equilibrio para las componentes de las fuerzas en cada uno de los ejes:

$$\left.\begin{array}{r} T\cos\beta + ma\,\mathrm{sen}\,\alpha = mg \\ T\,\mathrm{sen}\,\beta = ma\cos\alpha \end{array}\right] \quad (81)$$

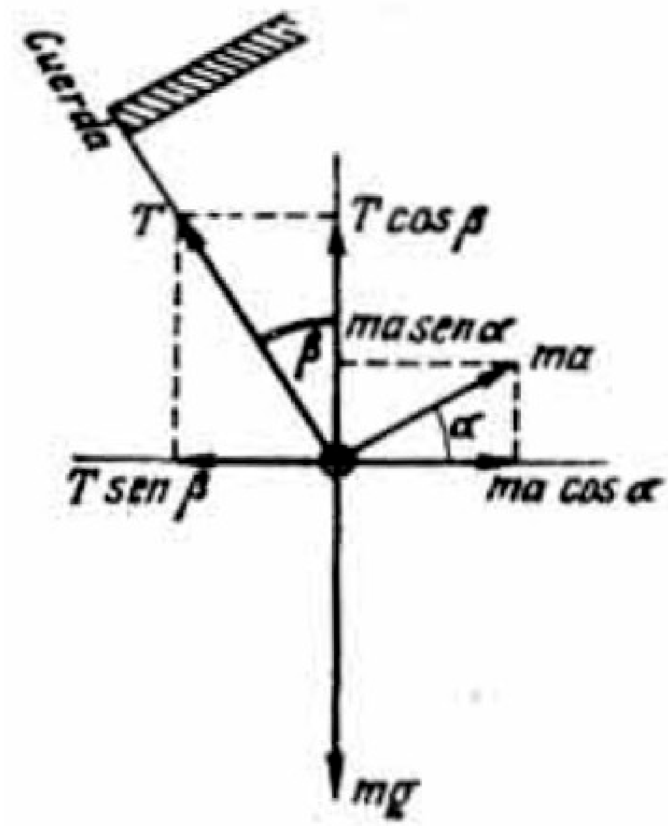


Figura 53

Teniendo en cuenta que a — gsen α, escribamos el sistema (81) en la forma

$$\left.\begin{array}{r} T\cos\beta = mg(1 - \mathrm{sen}^2\,\alpha) \\ T\,\mathrm{sen}\,\beta = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \end{array}\right]$$

Dividiendo estas ecuaciones entre sí, obtenemos

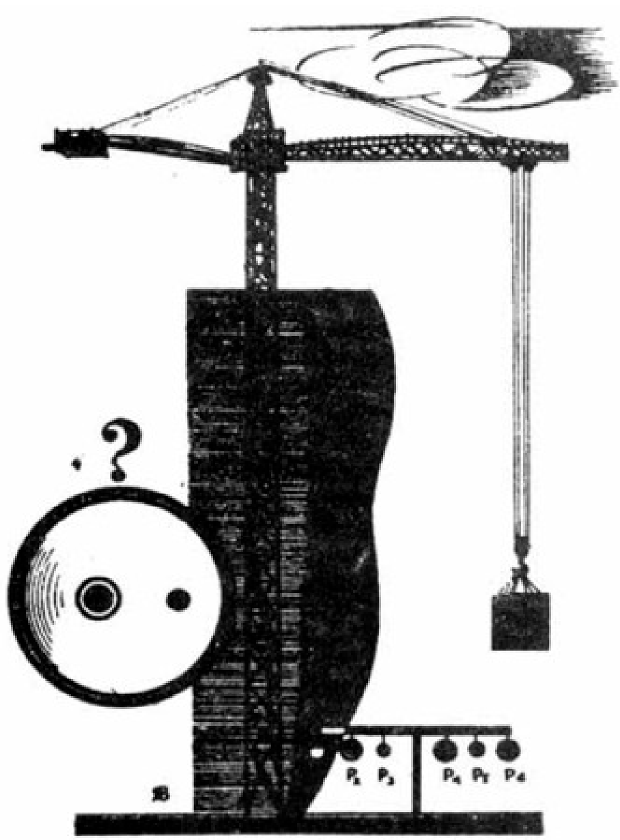
$$\mathrm{ctg}\ \beta = \mathrm{ctg}\ \alpha$$

En esta forma, los ángulos β y α resultan iguales. Por consiguiente, la dirección de equilibrio de la cuerda del péndulo es perpendicular al plano inclinado.

ESTUDIANTE B: Yo he estado atento a sus explicaciones y he llegado a la conclusión de que no estuve totalmente errado, cuando, al responder a su pregunta relacionada con las fuerzas aplicadas a un satélite terrestre, indiqué la fuerza gravitatoria y la fuerza centrífuga (ver § 8). Sencillamente, mi respuesta hay que referirla a un sistema de referencia relacionado con el mismo satélite y por fuerza centrifuga hay que entender la fuerza de inercia. En un sistema de referencia no inercial relacionado con el satélite, el problema es de estática y no de dinámica, es decir, se convierte en un problema de equilibrio de fuerzas, una de las cuales es la fuerza de inercia centrífuga.

PROFESOR: Este modo de tratar el problema del satélite es permitido. Sin embargo, la fuerza centrífuga a la cual Ud. se refiere en el § 8, no la analiza como una fuerza de inercia, Ud. sencillamente quería evitar que el satélite cayese a la Tierra. En tal caso no habría necesidad de pasar a un sistema de referencia ligado al satélite: el sentido físico del problema se capta mejor cuando no se introduce la fuerza centrifuga de inercia. Mi consejo anterior sigue en vigor: si no existe una necesidad especial, es mejor no utilizar sistemas no inerciales.

Capítulo 7

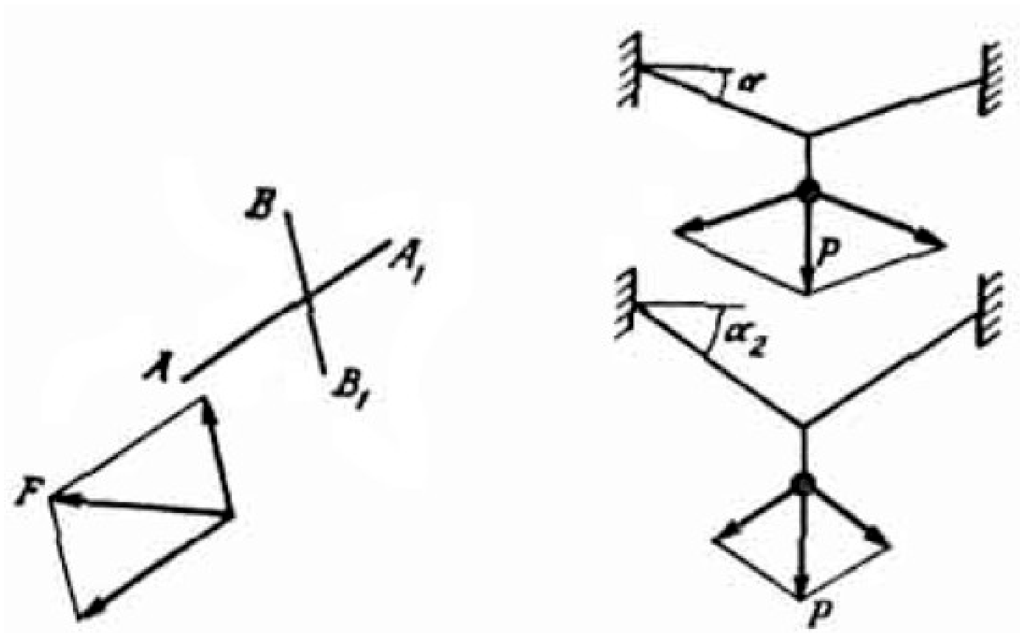


Las leyes de la estática son las leyes del equilibrio. Estudie atentamente estas leyes. No olvide su importancia práctica. Es imposible imaginarse a un constructor que no conozca las leyes fundamentales de la estática. Estudiemos casos que ilustren las reglas para descomponer las fuerzas. Analicemos las condiciones de equilibrio de un cuerpo, las cuales se emplean particularmente para determinar el centro de gravedad.

§ 13. ¿SABE USTED EMPLEAR LA DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS?

PROFESOR: En la resolución de problemas de mecánica, frecuentemente hay necesidad de descomponer las fuerzas. Por esta razón, me parece que no está por demás detenernos en este asunto con mayor detalle. Antes que nada quiero recordar una regla fundamental: para descomponer una fuerza en dos direcciones cualesquiera, hay que trazar por el origen y el extremo del vector que representa a la fuerza dos rectas, cada una de las cuales es paralela a la respectiva dirección de descomposición. Como consecuencia, se obtiene un paralelogramo cuyos lados serán las componentes que buscamos de la fuerza dada.

Esta regla se ilustra en la figura 54, en la cual la Fuerza F se descompone en dos direcciones: AA_1 y BB_1. Veamos algunos problemas en los cuales es necesario descomponer las fuerzas.



Figuras 54 y 55.

Primer ejemplo está indicado en la figura 55: *de los puntos medios de dos cuerdas, suspendemos dos cargas de peso P: las cuerdas se arquean debido al peso de las cargas y forman con la horizontal los ángulos α_1 y α_2, respectivamente. ¿Cuál de las cuerdas está sometida a mayor tensado?*

ESTUDIANTE A: En la misma gráfica y para cada caso representaré la descomposición de cada peso en las direcciones de las cuerdas. De aquí se deduce, que la tensión de la cuerda

es igual a $T = P/(2 \text{ sen } \alpha)$.Esto quiere decir; que estará más tensa la cuerda que se arquee menos.

PROFESOR: Correcto. ¿Se podría templar la cuerda de tal forma que no se arquee bajo la acción de un peso?

ESTUDIANTE A: ¿Por qué no?

PROFESOR: No se apresure a responder. Utilice el resultado que acaba de obtener.

ESTUDIANTE A: Sí, ya entiendo. Templar la cuerda de tal forma que no se arquee, es imposible, puesto que, al disminuir el ángulo α, aumenta la tensión de la cuerda. Por grande que sea la rigidez de la cuerda para un ángulo α lo suficientemente pequeño, la fuerza de la tensión la romperá.

PROFESOR: Es importante anotar el hecho de que la cuerda se arquea bajo la acción de un peso, debido a las propiedades elásticas de la cuerda que condicionan su alargamiento. Si la cuerda no pudiera estirarse (deformarse), sería imposible suspender de ella un peso. De aquí vemos que en la técnica de construcción, el cálculo de la rigidez de las diferentes construcciones está íntimamente ligado a su capacidad de deformarse elásticamente (como se dice, cada construcción «debe respirar»). Las construcciones demasiado rígidas resultan inservibles gracias a que las tensiones que pueden aparecer en ellas debido a pequeñas deformaciones, pueden transformarse en inmensas. Tales construcciones pueden a veces destruirse por la acción de su propio peso.

Si despreciamos el peso de la cuerda en el problema indicado, no es difícil encontrar la relación entre el ángulo α de suspensión de la cuerda y el peso P de la carga. Para esto es necesario utilizar la ley de Hooke para el alargamiento (deformación) elástico de la cuerda (ver problema N° 35). Veamos el segundo ejemplo. Como es de todos conocido «para sacar una cuña es preciso otra cuña». Comprobemos esto, utilizando la descomposición de las fuerzas.

En La figura 56 a, se trata de sacar la cuña 1 de la hendidura metiendo en esta hendidura la cuña 2, sobre la cual aplican una fuerza F. Los ángulos α y β son dados. Se requiere encontrar la fuerza que actúa sobre la cuña 1 y que contribuye a sacarla de la hendidura.

ESTUDIANTE A: Me es difícil resolver este problema.

PROFESOR: Descomponemos la fuerza F en la dirección horizontal y en la dirección perpendicular al lado AB de la cuña 2. Llamamos F_1 y F_2 a las respectivas componentes (figura 56 b).

La componente F_2 se compensa con la fuerza normal o de reacción de la pared izquierda de la hendidura; la componente F_1 que es igual a F/tg α, actúa sobre la cuña 1. Esta fuerza la descomponemos en una componente según el eje vertical y otra, en la dirección perpendicular al lado CD de la cuña 1, de aquí obtenemos las componentes F_3 y F_4 respectivamente (figura 56 c).

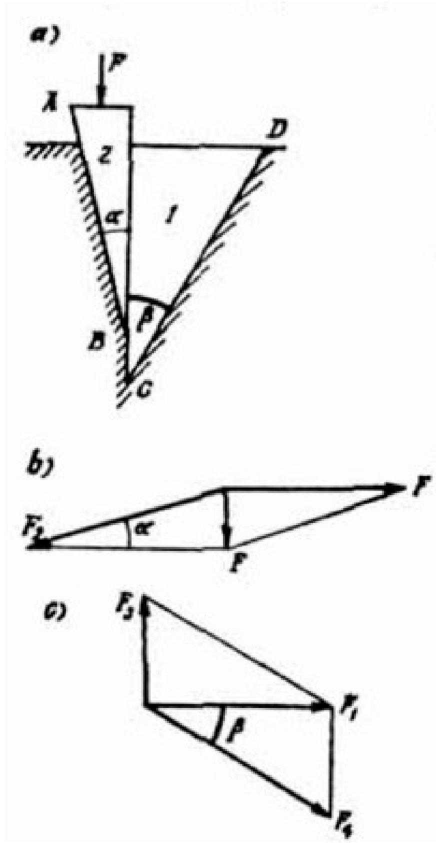


Figura 56

La componente F_4 se equilibra con la reacción de la pared de la derecha de la hendidura, mientras que la componente F_3 contribuye a sacar la cuña 1 de la hendidura. Esta es la fuerza que buscamos. Se ve fácilmente que ésta es igual a

$$F_1 \text{ tg } \beta = F (\text{tg } \beta / \text{tg } \alpha)$$

Estudiemos un tercer ejemplo, representado en la figura 57 a.

De una cuerda, cuya parte central permanece horizontal, están suspendidas dos cargas P_1 y P_2. Se pide encontrar el ángulo β, si se conoce el ángulo α y la tensión de cada trozo de la cuerda (T_{AB}, T_{AC}, T_{CD}). Este ejemplo es semejante al problema de las cuñas que acabamos de estudiar.

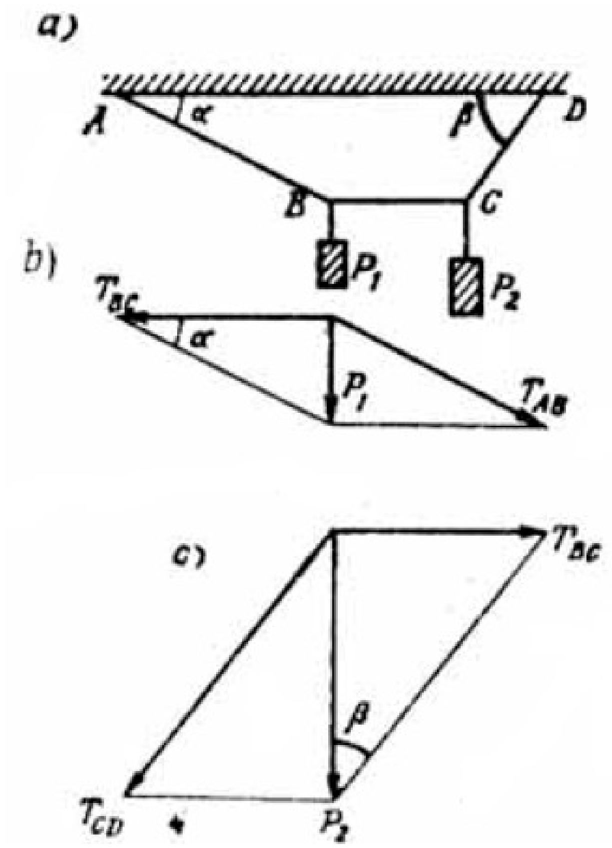


Figura 57

ESTUDIANTE A: Yo descompongo el peso P, en las direcciones AB y BC (figura 57 b). De aquí obtenemos:

$$T_{AB} = P_1/\text{sen}\ \alpha \text{ y } T_{AC} = P_1/\text{tg}\ \alpha$$

De esta manera hemos encontrado las dos tensiones. Luego descompongo el peso de la carga P_2 en las direcciones BC y CD (figura 57 c). De esta descomposición obtenemos:

$$T_{BC} = P_2/\text{tg}\ \beta \text{ y } T_{CD} = P_2/\text{sen}\ \beta$$

Igualando entre sí a los valores de las tensiones en el trozo BC de la cuerda, obtenidos a partir de las componentes, encontramos: $P_1/\text{tg}\ \alpha = P_2/\text{tg}\ \beta$, de donde

β= arctg (P_2/P_1 tg a). Colocando este resultado en la expresión para T_{CD}, encontramos la tensión T_{CD}.

PROFESOR: ¿Acaso es difícil llegar al resultado final, es decir, obtener la expresión de la fuerza T_{CD}?

ESTUDIANTE A: En dicha expresión figurará el seno del arctg β, o sea,

$$T_{CD} = \frac{P_2}{\operatorname{sen}\left(arctg\left(\frac{P_2}{P_1 tg\ \alpha}\right)\right)}$$

PROFESOR: Su resultado es correcto, pero puede escribirse en forma más simple, si expresamos el sen β por medio de la tg β. Efectivamente

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{(1 + tg^2\beta)}$$

Puesto que $tg\ \beta = tg\ \alpha\ \left({}^{P_2}/_{P_1}\right)$ encontramos que

$$T_{CD} = \frac{P_1}{(tg\ \alpha)\sqrt{1 + tg^2\alpha(P_2/P_1)^2}}$$

ESTUDIANTE B: Veo que antes de presentar el examen de física hay que repasar bien las matemáticas.

PROFESOR: Su observación es muy justa.

PROBLEMAS

35. Una cuerda elástica, tendida en un ascensor, se arquea por la acción de una carga, suspendida del centro de ésta como se indica en la figura 55. El ángulo de suspensión es igual a 30° cuando el ascensor está en reposo, cuando el ascensor se mueve con aceleración, es igual a 45°. Encontrar el valor y la dirección de la aceleración del ascensor. Se desprecia el peso de la cuerda.

36. Una bolita de masa m = 100 g está suspendida de una cuerda de longitud l = 1 m, que cuelga de un soporte, como se indica en la figura 58 (α = 30°).

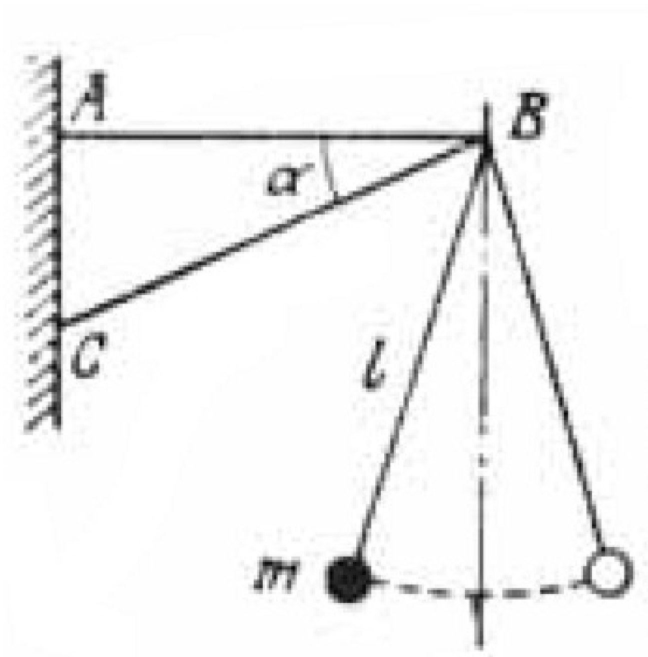


Figura 58

A la bolita se le comunica una velocidad horizontal de 2 m/s, después de la cual ésta empieza a oscilar. Calcular las fuerzas que actúan sobre las barras AB y BC, cuando la bolita se encuentra en los puntos de elongación máxima.

§ 14. ¿QUE SABE USTED DEL ESTADO DE EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS?

PROFESOR: En la figura 59 están representadas dos posiciones de equilibrio de un bloque. Las dos posiciones de equilibrio son estables, sin embargo, sus grados de estabilidad son diferentes. ¿Cuál de las posiciones es la más estable?

ESTUDIANTE A: Evidentemente que la más estable es la posición del bloque representada en la figura 59 a.

PROFESOR: ¿Por qué?

ESTUDIANTE A: En este caso el centro de gravedad del bloque se encuentra más cerca de la superficie terrestre.

PROFESOR: El asunto reside no solamente en lo que Ud. dice.

ESTUDIANTE B: En este caso el área del apoya es mayor que en la posición representada en la figura 59 b.

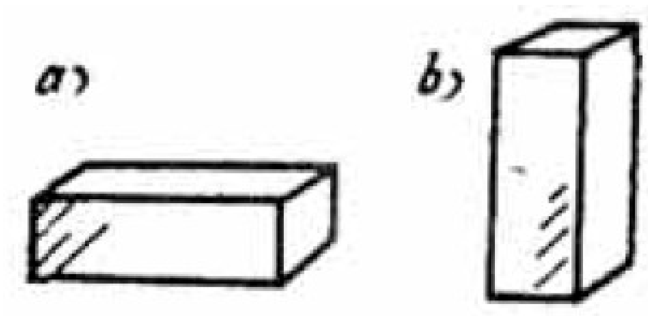


Figura 59

PROFESOR: No solamente por esto. Para analizar mejor este problema, estudiemos las posiciones de equilibrio de dos cuerpos: un paralelepípedo rectangular de base cuadrada y un cilindro (figura 60 a).

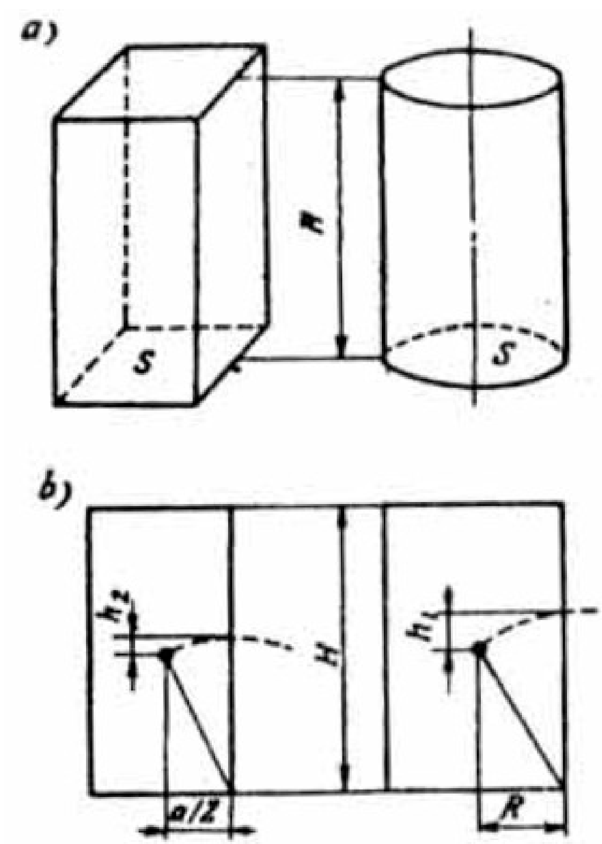


Figura 60.

Supongamos que los dos objetos tienen la misma altura H, y además son iguales sus áreas de apoyo S. En este caso los centros de gravedad de ambos bloques se encuentran a una misma altura y además son iguales sus bases de apoyo. Sin embargo, el grado de estabilidad no es el mismo para ambos cuerpos. La medida de la estabilidad de un determinado estado de equilibrio es la cantidad de energía que hay que comunicarte al cuerpo para sacarlo definitivamente de dicho estado.

ESTUDIANTE B: ¿Qué quiere decir la palabra «definitivamente»?

PROFESOR: Esto quiere decir, que el cuerpo por sí mismo, es decir, cuando se le deja libre, no puede regresar a su estado inicial. La energía indicada es igual al producto del peso del cuerpo por la altura, a la cual es necesario levantar su centro de gravedad, para que dicho cuerpo no pueda regresar a su estado inicial. En el ejemplo considerado del paralelepípedo y el cilindro, el radio de este último es igual a R = √S/π. mientras que el lado de la base del paralelepípedo es a = √S. Para sacar al cilindro de su estado de equilibrio, hay que levantar su centro de gravedad a una altura

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + R^2} - \frac{H}{2}$$

para hacer lo mismo con el paralelepípedo necesitamos levantar su centro de gravedad hasta la altura

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + (a/2)^2} - \frac{H}{2} \qquad \text{(figura 60 b)}$$

Por cuanto

$$\frac{a/2}{R} = \frac{\sqrt{\pi S}}{2\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 1$$

se concluye que $h_2 < h_1$, es decir, que de los dos cuerpos analizados, el cilindro resulta más estable. Después de estas observaciones les propongo que volvamos al ejemplo de las dos posiciones de equilibrio del bloque.

ESTUDIANTE A: Si damos vuelta al bloque éste pasará sucesivamente de una posición de equilibrio a otra.

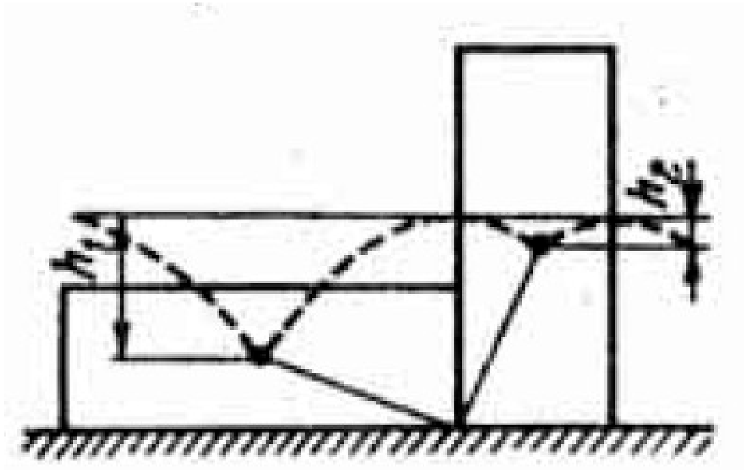


Figura 61.

En la figura 61 se indica en forma punteada la trayectoria, que en este caso describió el centro de gravedad del bloque. Para sacar al bloque de su posición acostada, hay que levantar su centro de gravedad a la altura h_1, es decir, gastar una cantidad de energía igual a mgh_1, mientras que para acostarlo, debemos levantar su centro de gravedad a una altura h_2, o sea, gastar una cantidad de energía igual a mgh_2. El mayor grado de estabilidad del bloque acostado se explica por la siguiente desigualdad

$$mgh_1 < mgh_2 \qquad (82)$$

PROFESOR: Ahora es correcta la explicación que Ud. hace del mayor grado de estabilidad de la posición acostada del cuerpo.

ESTUDIANTE B: Pero si la altura del centro de gravedad respecto al suelo y el área de apoyo influyen sobre las alturas h_1 y h_2, quiere decir, que al determinar el grado de estabilidad de un cuerpo hay que tener en cuenta de igual forma, tanto las alturas de los centros de gravedad, como las áreas de las superficies de apoyo.

PROFESOR: Sí. de igual forma, pero solamente en la medida en que estas magnitudes influyan sobre la diferencia entre las alturas h_1 y h_2. Así pues, en el ejemplo del cilindro y el paralelepípedo la comparación de las alturas de las centros de gravedad y de las áreas de las bases de los cuellos no resuelve el problema sobre la mayor o menor estabilidad de éstas. Además, quiero anotar una condición más. Hasta ahora, implícitamente hemos supuesto que los cuerpos están hechos del mismo material. En este caso, para que se cumpla la desigualdad (82) es suficiente la condición geométrica $h_1 < h_2$. Sin embargo, en general, los cuerpos que estamos comparando pueden estar hechos de materiales diferentes, de este modo, la desigualdad (82) se puede cumplir, inclusive bajo la condición de que $h_1 > h_2$, debido a la diferencia entre las densidades de los cuerpos. Así, por ejemplo, un bloque de corcho en su posición acostada será menos estable, que el mismo bloque hecho de plomo y que se encuentre parado. Analicemos ahora las condiciones necesarias para que un cuerpo esté en equilibrio. ¿Qué condiciones se necesitan para que un cuerpo esté en equilibrio?

ESTUDIANTE A: La suma de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo debe ser igual a cero. Además. la línea de acción del vector, que representa el peso del cuerpo. debe pasar dentro de los límites de la base o superficie de apoyo del cuerpo.

PROFESOR: Está bien, sin embargo, es mejor formular las condiciones de equilibrio de un cuerpo, de manera más general y más cómoda para su aplicación práctica. Hay que distinguir dos condiciones de equilibrio.

Primera condición: Las proyecciones sobre cualquier eje de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo deben compensarse mutuamente. En otras palabras, la suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas sobre un eje cualquiera debe ser igual a cero. Esta condición permite establecer tantas ecuaciones cuantos ejes independientes haya en el problema: para un problema unidimensional, una sola, para el bidimensional, dos y en el caso general, tres (se escogen ejes perpendiculares entre sí.)

Segunda condición: (la condición para los momentos): La suma algebraica de los momentos de las fuerzas aplicadas al cuerpo respecto a un punto cualquiera debe ser igual a cero. Para esto, los momentos de las fuerzas que tienden a girar el cuerpo alrededor del punto escogido en un determinado sentido (por ejemplo, en el sentido de las agujas del reloj). se toman con signo positivo, mientras que los momentos de las fuerzas que tienden a girar el cuerpo en el sentido contrario (es decir, contrario a las agujas del reloj), se toman con signo negativo. Para escribir la condición para los momentos, hay que realizar las siguientes operaciones:

a. deducir todas las fuerzas aplicadas al cuerpo
b. escoger el punto, respecto al cual vamos a analizar los momentos de las fuerzas.
c. encontrar los momentos de todas las fuerzas respecto al punto escogido;
d. y establecer la suma algebraica de los momentos de las fuerzas e igualarla a cero.

Al utilizar la condición para los momentos hay que tener en cuenta dos Factores:

1. formulación, hecha anteriormente, se refiere al caso cuando todas las fuerzas y las distancias en el problema considerado descasan sobre el mismo plano (este problema no es tridimensional);
2. la suma algebraica de los momentos de las fuerzas con relación a cualquier punto, tomado dentro o fuera del cuerpo, debe ser igual a cero.

Se debe anotar, que el valor de cada momento depende del punto que se toma (respecto al cual se consideran los momentos de las fuerzas); sin embargo, la suma de estos momentos es siempre igual a cero. Para comprender mejor las condiciones de equilibrio, estudiemos un problema concreto. *Una viga, cuyo peso es P_1, está fija en los puntos B y C (figura 62 a). Del punto D de la viga cuelga una carga P_1; se conocen las distancias AB = a, BC = 2a, CD = a. Se pide determinar las reacciones N_A y N_C suponiendo que estas actúan en la dirección vertical.*

Como de costumbre, primero señale las fuerzas aplicadas al cuerpo.

ESTUDIANTE A: En el problema dado la viga es el cuerpo y sobre éste están aplicadas cuatro fuerzas: los pesos P_1 y P_2 y las reacciones N_B y N_C.

PROFESOR: Represente a estas fuerzas en un gráfico.

ESTUDIANTE A: Pero no sé si dichas reacciones están dirigidas hacia arriba o hacia abajo.

PROFESOR: Suponga que ambas están dirigidas hacia arriba.

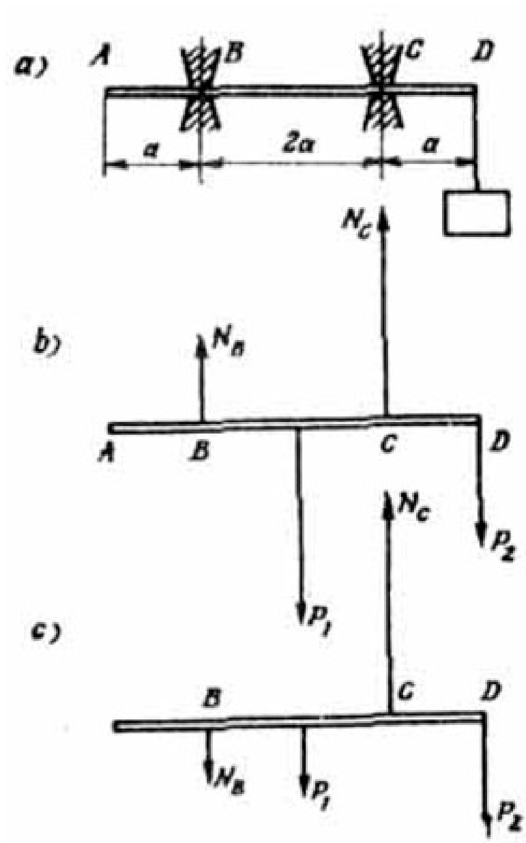


Figura 62.

ESTUDIANTE A: En ese caso he aquí mi diagrama (figura 62. b). Yo escribo la primera condición de equilibrio en Forma de una ecuación

$$N_B + N_C = P_1 + P_2$$

PROFESOR: No tengo nada en contra de su ecuación. Sin embargo, en este problema es más sencillo utilizar la segunda condición de equilibrio (la condición para los momentos), utilizándola una vez con relación al punto B y otra, respecto al punto C.

ESTUDIANTE A: Está bien, así lo haré. En consecuencia obtengo las siguientes ecuaciones, con relación al punto B y C respectivamente:

$$P_1a - N_C2a + P_23a = 0$$
$$N_B2a - P_1a + P_2a = 0 \qquad (83)$$

PROFESOR: ¿Se da Ud. cuenta? Ahora cada ecuación contiene sólo una de las magnitudes desconocidas, la cual se puede determinar inmediatamente.

ESTUDIANTE A: A partir de la ecuación (83) encontramos que

$$N_B = (P_1 — P_2)/2 \quad (84)$$

$$N_C = (P_1 + 3P_2/2 \quad (85)$$

PROFESOR: La expresión (85) es siempre positiva. Esto es, la reacción N_C está siempre dirigida hacia arriba (como lo hemos supuesto). La expresión (84) es positiva si $P_1 > P_2$, negativa si $P_1 < P_2$, e igual a cero si $P_1 = P_2$. Es decir, que para $P_1 > P_2$ la fuerza N_B está dirigida en el sentido que hemos supuesto, o sea, hacia arriba (ver figura 62, b) para $P_1 > P_2$, dicha fuerza está dirigida hacia abajo (ver figura 62, c); para $P_1 = P_2$, no hay reacción N_B.

PROFESOR: En los exámenes muchas veces al estudiante le resulta difícil localizar el centro de gravedad de un cuerpo o de un sistema de cuerpos. ¿Tiene Ud. alguna duda al respecto?

ESTUDIANTE A: Si, tengo algunas. No sé exactamente, cómo encontrar la posición del centro de gravedad en los dos ejemplos indicados en las figuras 63 a y 64 a.

PROFESOR: Analicemos estos dos casos. En el primero resulta más cómodo dividir la lámina en dos rectángulos, como lo indica la línea punteada en la figura 63 b. El centro de gravedad del rectángulo 1 se encuentra en el punto A; el peso del rectángulo es proporcional a su área que es igual a 6 unidades como fácilmente se ve en la figura (aquí el peso condicionalmente se mide en centímetros cuadrados).

El centro de gravedad del rectángulo 2 está localizado en el punto B y su peso es igual a 10 unidades. Proyectamos A y B sobre los ejes de las coordenadas Ox y Oy: las proyecciones las representamos por A_1 y B_1 sobre el eje x y por A_2 y B_2 sobre el eje y.

Analicemos luego las «barras» A_1B_1 y A_2B_2, suponiendo que la masa está concentrada en los extremos de las «barras» y la masa de un extremo es igual a la masa del rectángulo correspondiente (ver figura 63 b).

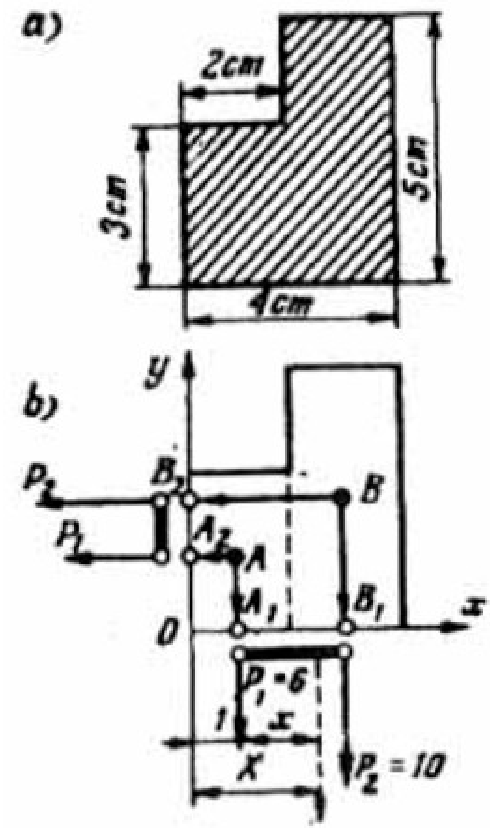


Figura 63.

En consecuencia, el problema sobre la determinación del centro de gravedad de nuestra lámina se convierte en la localización de los centros de gravedad de las «barras» y A_1B_1 y A_2B_2. Las posiciones de estos centros de gravedad representan las coordenadas del centro de gravedad de la lámina. Hallemos la respuesta final de este problema.

§ 15. ¿COMO LOCALIZA USTED EL CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO?

Determinemos primero la posición del centro de gravedad de la «barra» A_1B_2, utilizando la regla conocida para los momentos de las fuerzas (ver figura 63 b):

$$6x = 10(2 — x)$$

De donde encontramos que: $x = 5/4$ cm. Esto es, la abscisa del centro de gravedad de la lámina en el sistema de coordenadas que hemos escogido es igual a

$$X = (1 + x)\text{ cm} = 9/4\text{ cm}$$

Análogamente determinamos la posición del centro de gravedad de la «barra» A_2B_2:

$$6y = 10(1 - y)$$

de donde se deduce que y = 5/8 cm, es decir, la ordenada del centro de gravedad que buscamos de la lámina es igual a

$$Y = (1,5 + y)\text{ cm} = 17/8\text{ cm}.$$

ESTUDIANTE A: He comprendido. La abscisa X del centro de gravedad de la lámina yo la habría determinado de igual manera. pero tenía dudas sobre si sería posible del mismo modo encontrar la ordenada Y.

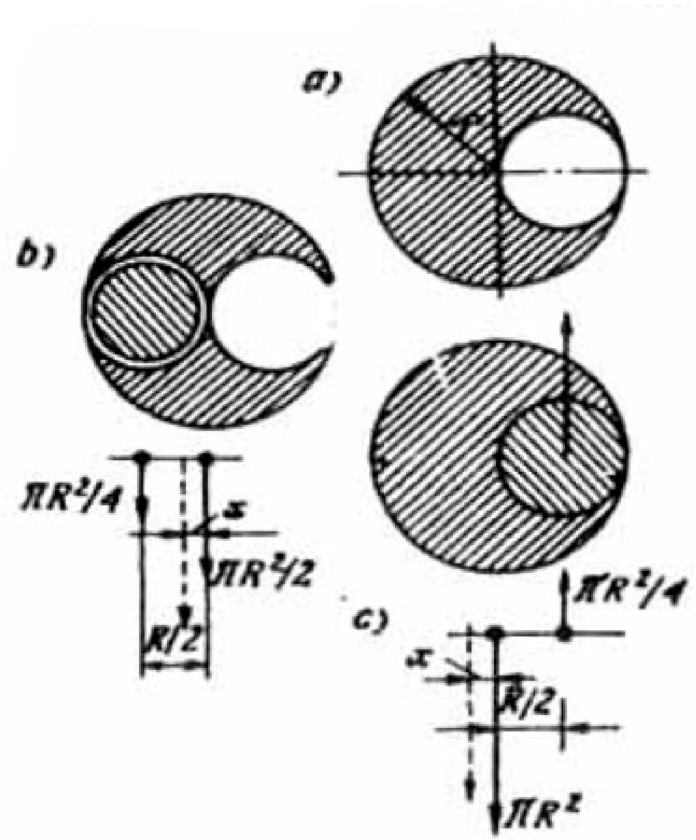


Figura 64.

PROFESOR: Estudiemos el segundo caso, representado en la figura 64 a. Aquí son posibles dos caminos. Se puede, por ejemplo, en lugar del disco dado con un hueco, analizar el sistema de dos cuerpos, el disco con dos huecos simétricos y el disco pequeño que colocamos en uno de los huecos (figura 64 b). Los centros de gravedad de estos cuerpos se encuentran en sus centros geométricos. Teniendo en cuenta, que el peso del disco con dos huecos es proporcional a su área, es decir,

$$\pi R^2 — 2\pi R^2/4 = \pi R^2/4$$

y que el peso del disco pequeño es proporcional al área $\pi R^2/4$, llegamos al problema sencillo de determinar el punto de aplicación de la resultante de las dos fuerzas representadas abajo de la figura 64 b. Llamemos x a la distancia desde el centro de gravedad que buscamos hasta el centro geométrico del disco grande. Entonces, de acuerdo con la figura 64 b, .podemos escribir:

$$(\pi R^2/4)(R/2 — x) = (\pi R^2/2)x$$

de donde obtenemos que $x = R/6$

Es posible otra manera de resolver el problema considerado. Se puede cambiar el disco dado con el hueco por un disco macizo más un disco pequeño que colocamos en lugar del hueco y que tiene un peso negativo (es decir, dirigido hacia arriba) (figura 64 c), que compensará al peso positivo del pedazo correspondiente en el disco lleno, lo cual corresponde al disco con un hueco. En este caso, llevamos el problema a la localización del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas, representadas abajo de la figura 64 c. De acuerdo con este diagrama escribimos:

$$\pi R^2 x = (\pi R^2/4)(R/2 + x)$$

de donde obtenemos que $x = R/6$, lo mismo que en el caso anterior.

ESTUDIANTE A: Me gusta más el primer método, puesto que ahí no tenemos que introducir un peso negativo.

PROFESOR: Sería importante que estudiemos *el problema sobre la localización del centro de gravedad del sistema de cargas, representado en la figura 65 a. Están dadas seis cargas de diferentes pesos (P1, P2,..., P_6), colocadas a lo largo de una barra y a iguales distancias una de otra. Despreciamos el peso de la barra.* ¿Cómo resolverla Ud. este problema?

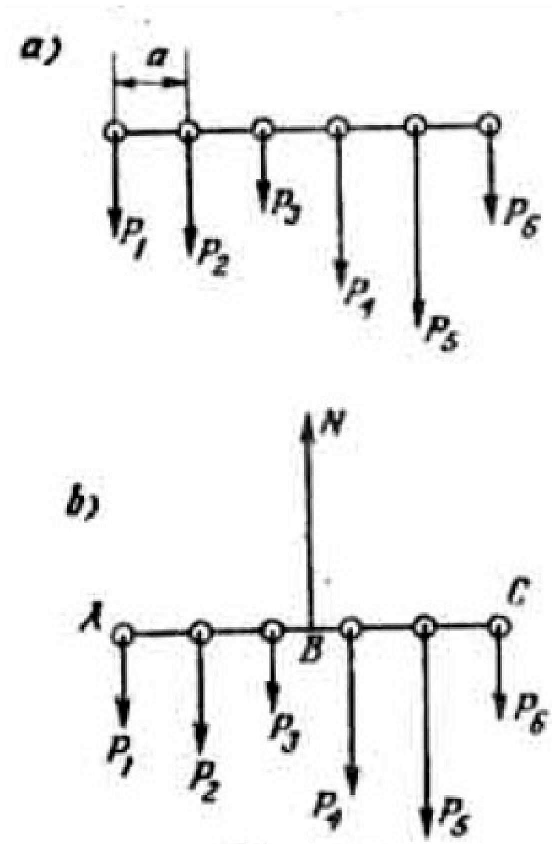


Figura 65.

ESTUDIANTE A: Primero, analizaría dos de las cargas, digamos, P_1 y P_2, encontraría el punto de aplicación de su resultante; representaría a ésta (que es igual a la suma $P_1 + P_2$) en un diagrama y eliminarla del análisis ulterior las dos cargas P_1 y P_2. Ahora en lugar de seis fuerzas quedan cinco; luego, encontraríamos el punto de aplicación de la resultante de otro par de fuerzas y así continuaría sucesivamente, hasta llegar a la resultante total, cuyo punto de aplicación es precisamente el centro de gravedad del sistema dado.

PROFESOR: Este método es correcto. sin embargo, es demasiado pesado. Podemos indicar un método más elegante. Para esto, imaginariamente apoyamos la barra en su centro de gravedad (en el punto B de la figura 65 b).

ESTUDIANTE B (interrumpiendo): Pero si Ud. todavía no sabe cuál es la posición del centro de gravedad, ¿De dónde sabe Ud, que éste se encuentra entre los puntos de aplicación de las fuerzas P_3 y P_4?

PROFESOR: Me es indiferente saber donde está exactamente localizado el centro de gravedad. Yo no utilizaría el resultado dado en la figura 65 b, en donde el centro de gravedad estaba localizado entre los puntos de aplicación de las fuerzas P_1 y P_2 De tal manera imaginariamente apuntalaremos la barra en su centro de gravedad. Como consecuencia, la barra se encontrará en estado de equilibrio. Para esto, además de las seis fuerzas, sobre la barra actuará una fuerza más, la de la reacción N. Puesto que la barra está en equilibrio se pueden utilizar las condiciones de equilibrio (ver § 14). Utilicemos inicialmente la primera condición de equilibrio para las proyecciones de las fuerzas en dirección vertical:

$$N = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 \qquad (86)$$

después, la segunda condición de equilibrio, sumando los momentos de las fuerzas respecto al punto A en la figura 65 b (es decir, hacia el extremo izquierdo de la barra). En este caso todas las fuerzas tienden a volcar la barra en el sentido de las agujas del reloj, mientras que las reacciones tienden a volcar la barra en el sentido contrario a las agujas del reloj, Escribimos

$$N\,(AB) = P_2\,a + P_3\,2a + P_4\,3a + P_5\,4a + P_6\,5a \qquad (87)$$

Uniendo las condiciones de equilibrio (86) y (87), encontramos el segmento AB, o sea, !a posición del centro de gravedad que buscamos, medido desde el extremo izquierdo de la barra:

$$AB = \frac{P_2 a + P_3\,2a + P_4\,3a + P_5\,4a + P_6\,5a}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6} \qquad (88)$$

ESTUDIANTE A: Sí, su método es mucho más sencillo.

PROFESOR: Ud. debe observar que su método de solución del problema es muy sensible al número de cargas aplicadas a la barra (cada carga que se agrega a la barra complica demasiado el problema), mientras que mi método no se complica nada cuando crece el número de cargas. Al agregar una nueva carga, tanto en el numerador como en el denominador de la expresión (88) aparece un sumando más.

ESTUDIANTE B: ¿Se puede determinar la posición del centro de gravedad de la barra, utilizando simplemente la condición de los momentos?

PROFESOR: Sí, es posible. Pero hay que escribir la condición de equilibrio de los momentos de las fuerzas con relación a dos puntos diferentes. Haremos precisamente esto. Tomaremos los momentos de las fuerzas respecto a los puntos A y C (ver la figura 65 b). Para el punto A la condición de las momentos se expresa por medio de la ecuación (87) y para el punto C, la ecuación tendrá la forma:

$$N\,(5a - AB) = P_5a + P_42a + P_33a + P_24a + P_15a \qquad (89)$$

Dividiendo (87) por (89), obtenemos

$$\frac{AB}{5a - AB} = \frac{P_2a + P_3\,2a + P_4\,3a + P_5\,4a + P_6\,5a}{P_5a + P_42a + P_33a + P_24a + P_15a}$$

De aquí encontramos

$$AB(P_5a + P_42a + P_33a + P_24a + P_15a + P_2a + P_3\,2a + P_4\,3a + P_5\,4a + P_6\,5a) = 5a(P_2a + P_3\,2a + P_4\,3a + P_5\,4a + P_6\,5a)$$

o sea

$$AB \cdot 5a(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6) = P_2a + P_3\,2a + P_4\,3a + P_5\,4a + P_6\,5a$$

De este modo llegamos al resultado (88).

PROBLEMA

37. Determinar la posición del centro de gravedad de un disco del cual han sido cortados dos pedazos circulares como se indica en la figura 66. Los radios de los huecos son iguales a la mitad y a la cuarta parte del radio R del disco, respectivamente.

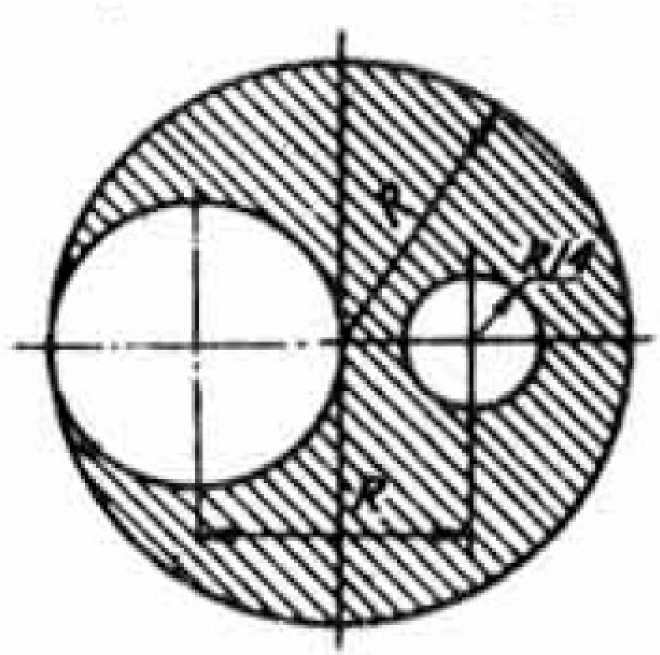
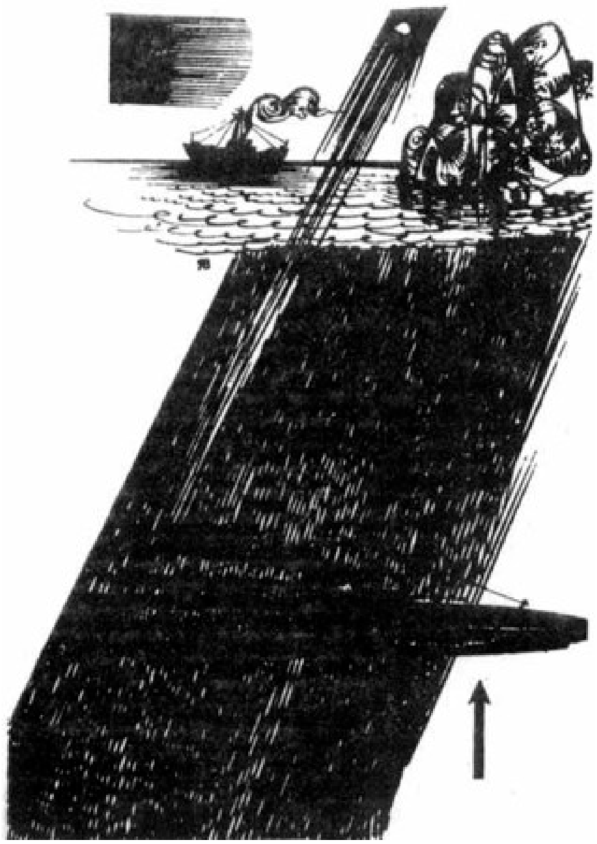


Figura 66.

Capítulo 8



La ley (principio) de Arquímedes por lo general, no llama la atención. Sin embargo, basándose en esta ley se pueden formular preguntas y problemas de gran interés. Trataremos de las aplicaciones de esta ley en el estado de imponderabilidad de los cuerpos

§ 16. ¿SABE USTED LA LEY DE ARQUÍMEDES?

PROFESOR: ¿Sabe Ud. la ley (principio) de Arquímedes?

ESTUDIANTE A: Si, por supuesto. Sobre un cuerpo sumergido en un liquido actúa la Fuerza de empuje, la cual es igual al pese de la cantidad de liquido desalojado por el cuerpo.

PROFESOR: Correcto. Solamente hay que agregar lo relacionado ron los gases: sobre un cuerpo «sumergidos en un gas, también actúa la fuerza de empuje. ¿Podría Ud. ahora demostrar la validez de su afirmación?

ESTUDIANTE A: ¿Demostrar la validez de la ley de Arquímedes?

PROFESOR: Si.

ESTUDIANTE A: ¡Pero si la ley de Arquímedes se obtuvo directamente del experimento!

PROFESOR: Es verdad. Sin embargo, se la puede deducir de simples consideraciones energéticas. Levantemos imaginariamente un cuerpo de volumen V y densidad ρ hasta una altura H, haciendo esto una vez en el vacío y otra vez en un líquido de densidad ρ_0. En el primer caso, para el ascenso indicado hay que gastar una cantidad de energía igual a ρ_0gVH. En el segundo caso se gasta menos energía, puesto que al levantar un cuerpo de volumen V a una altura H, un volumen V de líquido desciende la misma altura. Por esto, en el segundo caso, para levantar el cuerpo se necesita una cantidad de energía igual a (ρgVH — ρ_0gVH). Interpretando la cantidad de energía ρ_0gVH que restamos como el trabajo de una cierta fuerza, podemos deducir, que en comparación con el vacío, dentro del líquido sobre el cuerpo actúa una fuerza complementaria F = ρ_0gV, la cual facilita el ascenso del cuerpo. Esta fuerza se denomina fuerza de empuje. Se puede comprobar fácilmente que dicha fuerza es igual precisamente al peso de un volumen V de líquido desalojado por el cuerpo. (Notemos, que en el razonamiento que hemos hecho no tomamos en cuenta la pérdida de energía relacionada con la fricción que existe durante un desplazamiento real de un cuerpo en un líquido.)

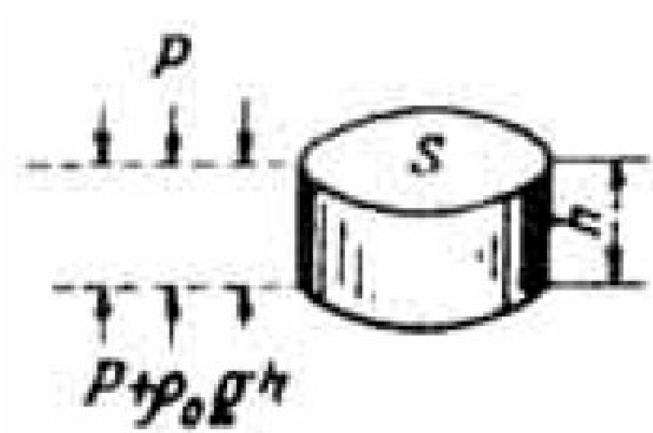


Figura 67.

A la ley de Arquímedes se puede llegar también por otro camino. Supongamos, que el cuerpo que sumergimos en el líquido tiene forma cilíndrica de altura h y de área de la base igual a S (figura 67).

Digamos que la presión del líquido sobre la base superior del cilindro es igual a p. En tal caso, la presión sobre la base inferior será igual a p + ρ_0gH. Es decir, existe una diferencia de presiones entre las bases del cilindro igual a ρ_0gH; si este valor lo multiplicamos por el área de la base S, obtendremos la fuerza F = ρ_0gHS, la cual empuja al cuerpo hacia arriba. Puesto que hS = V es el volumen del cilindro, es fácil ver que dicha fuerza es la fuerza de empuje que figura en la ley de Arquímedes.

ESTUDIANTE A: Sí. Me doy cuenta que se puede llegar a la ley de Arquímedes por simple raciocinio.

PROFESOR: Antes de seguir adelante, recordemos qué condición se necesita para que un cuerpo flote.

ESTUDIANTE A: Recuerdo cuál es esta condición. Según la ley de Arquímedes la fuerza de empuje debe compensar el peso del cuerpo.

PROFESOR: Correcto. Estudiemos el siguiente ejemplo: en un recipiente con agua flota un pedazo de hielo. ¿Qué ocurrirá con el nivel del agua en este recipiente cuando el hielo se derrita?

ESTUDIANTE A: La posición del nivel no varía, ya que el peso del hielo se compensa con la fuerza de empuje y, por consiguiente, es igual al peso del líquido (en este caso agua) desalojado por el hielo. Cuando el hielo se derrite, se convierte en agua cuyo volumen antes había desalojado el hielo.

PROFESOR: Exactamente. Ahora, supongamos que dentro del pedazo de hielo se encontraba, por ejemplo, un trozo de plomo. ¿Qué le ocurre en este caso al nivel del agua, cuando el hielo se derrita?

ESTUDIANTE A: Si no estoy equivocado, el nivel del agua en el recipiente debe descender un poco. Sin embargo, es difícil para mí demostrar dicha afirmación.

PROFESOR: Llamemos V al volumen del pedazo de hielo junto con el plomo, v, al volumen del pedazo de plomo, V_1 al volumen del agua desalojada por la parte de hielo sumergida, ρ_0, a la densidad del agua, ρ_1 a la densidad del hielo y ρ_2, a la densidad del plomo. El pedazo de hielo junto con el plomo tiene un peso igual a

$$\rho_1 g(V - v) + \rho_2 gv$$

Este peso se compensa con la fuerza de empuje $\rho_0 gV_1$, es decir,

$$\rho_1 g(V - v) + \rho_2 gv = \rho_0 gV_1 \qquad (90)$$

Después de derretirse, el hielo se convierte en cierta cantidad de agua, cuyo volumen V_2 se determina a partir de la igualdad

$$\rho_1 g(V - v) = \rho_0 g\, V_2$$

Colocando esta igualdad en la expresión (90), obtendremos

$$\rho_0 g\, V_2 + \rho_2 gv = \rho_0 g\, V_1$$

de donde se concluye que el volumen de agua que se obtiene como resultado de la fusión del hielo, es igual a:

$$V_2 = V_1 - v(\rho_2/\rho_0) \qquad (91)$$

Así pues, hasta la fusión del hielo fue desalojado un volumen V_1 de agua. Después, el plomo y el agua pasan a ocupar un volumen $(V_2 + v)$. Para responder a la pregunta, sobre la posición del nivel del agua en el recipiente, hay que comparar estos volúmenes. De la fórmula (91) obtenemos que

$$V_2 + v = V_1 - v(\rho_2 - \rho_0)/\rho_0 \qquad (92)$$

Puesto que $\rho_2 > \rho_0$ (el plomo es más pesado que el agua), de la fórmula (92) establecemos fácilmente que $(V_2 + v) < V_1$. Por lo tanto, como consecuencia de la fusión del hielo, el nivel del agua en el recipiente desciende. Dividiendo la diferencia de volúmenes $V_1 - (V_2 + v)$ por el área transversal S del recipiente (para mayor facilidad, suponemos que el recipiente tiene forma cilíndrica), obtenemos la altura h, que desciende el nivel del agua después de que el hielo se derrite:

$$h = v(\rho_2 - \rho_0)/(\rho_0 S) \qquad (93)$$

¿Entiende Ud. la solución del problema?

ESTUDIANTE A: Si entiendo.

PROFESOR: Ahora, en lugar del plomo, coloquemos dentro del hielo un pedazo de corcho de volumen v y densidad ρ_3. ¿Qué le sucederá al nivel del agua cuando el hielo se derrita?

ESTUDIANTE A: Yo creo que el nivel del agua en el recipiente subirá un tanto.

PROFESOR: ¿Por qué?

ESTUDIANTE A: En el caso del plomo, el nivel del agua descendió. El plomo es más pesado que el agua, mientras que el corcho es más liviano que el agua. Por esta razón, en el caso del corcho hay que esperar el efecto contrario: el nivel del agua debe levantarse.

PROFESOR: Ud. se equivoca. Su respuesta sería correcta, si el corcho después de la fusión del hielo permaneciera dentro del agua. Pero esto, evidentemente, es imposible, por cuanto el corcho es más liviano que el agua y éste flotará necesariamente sobre la superficie. Por lo tanto, en el caso del corcho (lo mismo que con otro cuerpo más liviano que el agua) se necesita un análisis especial. Utilizando el resultado (91) encontramos la diferencia entre los volúmenes del agua, desalojada por el pedazo de hielo con el corcho y del agua que se obtiene al fundirse el hielo

$$V_1 - V_2 = v(\rho_3/\rho_0) \qquad (94)$$

Luego utilicemos la condición para que el pedazo de corcho flote

$$\rho_3 v = \rho_0 v_1 \qquad (95)$$

donde v_1 es el volumen del corcho sumergido en el agua; colocando en (94) esta última igualdad, obtenemos

$$V_1 = V_2 + v_1$$

En esta forma, el volumen de agua desalojada por el hielo resulta precisamente igual a la suma del volumen del agua que produce el hielo que se derrite más el volumen de agua desalojada por la parte sumergida del corcho. De esto concluimos que, en el caso estudiado, el nivel del agua en el recipiente no varía.

ESTUDIANTE A: ¿Y si en lugar del corcho el pedazo de hielo tuviese. dentro una burbuja de aire?

PROFESOR: Una vez que el hielo se haya derretido, burbuja saldrá. No es difícil comprobar que en tal caso, el nivel del agua en el recipiente toma exactamente la misma posición que tenía antes de la fusión del hielo. En una palabra, el caso de la burbuja de aire en el hielo es análogo al caso del corcho dentro del hielo.

ESTUDIANTE A: Veo que en base a la ley de Arquímedes se puede plantear un buen número de problemas y preguntas muy interesantes.

PROFESOR: Desafortunadamente, algunos estudiantes desprecian la importancia de esta ley y no se dan a la tarea de estudiarla para los exámenes.

Estudiemos el siguiente problema. En uno de los platillos de una balanza de resorte hay un recipiente con agua y en el otro, un soporte del cual está suspendida una carga. Los platillos de la balanza están equilibrados (figura 68, a).

Giramos el soporte de tal manera que la carga que sobre éste cuelga resulte hundida completamente en el agua. Evidentemente que el equilibrio de la balanza se destruye, puesto que el platillo con el soporte resulta más liviano que antes (figura 68, b). ¿Qué peso hay que agregar al platillo con el soporte para restablecer nuevamente el equilibrio de la balanza?

ESTUDIANTE A: Sobre la carga actúa la fuerza de empuje igual al peso del agua desalojada igual a su vez al volumen de la carga (llamemos a este peso P); por consiguiente, para restablecer el equilibrio hay que colocar sobre el platillo con el soporte una pesa cuyo peso sea igual a P.

PROFESOR: Ud. está equivocado. Aquí, no está por demás recordar la tercera ley de Newton. De acuerdo a esta ley, según la fuerza con la cual el agua del recipiente actúa sobre la carga, con igual fuerza pero en sentido contrario actuará la carga sobre el agua. Por lo tanto, al disminuir el peso del platillo con el soporte, simultáneamente aumentará el peso del platillo con el recipiente. Por consiguiente, para restablecer el equilibrio se necesita una pesa que pese 2P.

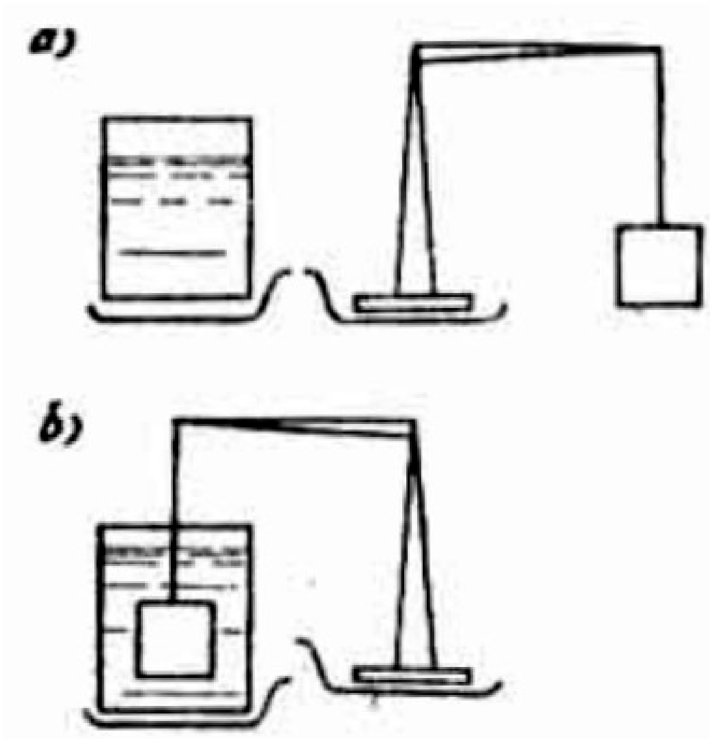


Figura 68

ESTUDIANTE A: No puedo captar completamente su razonamiento. De todos modos, la interacción entre la carga y el agua del recipiente no se parece a la interacción de dos cuerpos, que se estudia en mecánica.

PROFESOR: El campo de acción de la tercera ley de Newton no se limita a la mecánica. La expresión «la acción es igual a la reacción» se refiere a cualquier clase de interacción. Sin embargo, en el caso considerado no es difícil hacer otro razonamiento, en contra el cual seguramente Ud. no dirá nada. Analicemos el soporte con la carga y el recipiente con agua como un solo sistema; su peso, evidentemente, será la suma del peso del platillo de la izquierda y el peso del platillo de la derecha. El peso total del sistema no puede variar porque sus partes interaccionan mutuamente. Por lo tanto, si como resultado de la interacción el peso en el platillo de la derecha disminuye en P, esta misma interacción debe conducir a un aumento del peso en el platillo de la izquierda, igual también a P. Por esta razón, después de introducir la carga dentro del recipiente con agua, la diferencia de peso entre los dos platillos debe ser igual a 2P.

PROBLEMA

38. En un recipiente de forma cilíndrica y de un área transversal igual a S, derramamos agua en la cual flota un pedazo de hielo con una bolita de plomo en su interior. El volumen del pedazo de hielo junto con la bolita es igual a V; sobre el nivel del agua sobresale 1/20 de dicho volumen. ¿Qué altura desciende el nivel del agua en el recipiente, una vez que el hielo se haya derretido? Las densidades del agua, del hielo y del plomo se consideran conocidas.

§ 17. ¿SE CUMPLE LA LEY DE ARQUÍMEDES DENTRO DE UNA NAVE CÓSMICA?

PROFESOR: ¿Se cumple la ley de Arquímedes en una nave cósmica que se encuentra en estado de imponderabilidad?

ESTUDIANTE A: Según mi criterio no debe cumplirse, puesto que la esencia de la ley de Arquímedes radica en el hecho de que debido a la diferencia entre las densidades de un cuerpo y de un líquido (tomando, por supuesto, volúmenes iguales) se requieren diferentes trabajos para levantarlos a una misma altura. En el estado de imponderabilidad, la diferencia entre dichos trabajos no debe existir, ya que tanto el trabajo necesario para levantar un cuerpo como el trabajo para levantar un volumen igual de líquido son nulos. A esta misma conclusión llegamos, al hacer uso de la presión que un líquido ejerce sobre un cuerpo sumergido en él, por acción de la fuerza de empuje debida a la diferencia entre las presiones en las bases inferior y superior del cuerpo considerado. En estado de imponderabilidad esta diferencia desaparece y junto con ella desaparece la fuerza de empuje. Es posible apreciar que en el estado de imponderabilidad no existe diferencia alguna entre «la parte superior» y «la parte inferior», por lo tanto es imposible indicar, cuál base del cuerpo es la superior y cuál la inferior. Así pues, en el estado de imponderabilidad sobre un cuerpo que se encuentre dentro de un líquido, no actúa la fuerza de empuje, lo cual significa que no se cumple la ley de Arquímedes.

ESTUDIANTE B: Yo no estoy de acuerdo con la última conclusión del estudiante A. Yo considero que la ley de Arquímedes también se cumple en el estado de imponderabilidad. Razonemos en forma más minuciosa. No pasemos inmediatamente a la imponderabilidad sino que analicemos primero el caso de un ascensor, que se mueva con cierta aceleración a y en la misma dirección que la aceleración de la gravedad g. Suponernos además que a<g. Es fácil imaginarse que en este caso, sobre el cuerpo sumergido en un líquido, actuará la fuerza del empuje

$$F = \rho_0(g - a)V \qquad (96)$$

el peso del volumen de liquido igual al volumen del cuerpo es igual a $\rho_0(g - a)V$. De tal manera, el empuje resulta, como antes, igual al peso del líquido desalojado por el cuerpo, es decir, continúa cumpliéndose la ley de Arquímedes. Continuemos aumentando poco a poco la aceleración a, acercando su valor a g. De acuerdo con la fórmula (96) la fuerza de empuje, en tal caso, disminuirá paulatinamente, pero al mismo tiempo y exactamente lo mismo disminuirá el peso del líquido desalojado. En otras palabras, al acercarse la aceleración a al valor g, la ley de Arquímedes continuará siendo válida. En el límite, cuando a = g se alcanza el estado de imponderabilidad; en tal caso, el empuje se hace igual a cero, pero también se hace cero el peso del liquido desalojado por el cuerpo. Por lo tanto, nada nos impide afirmar que la ley de Arquímedes es válida también en el estado de imponderabilidad. Quiero ilustrar mis razonamientos con un ejemplo claro. Supongamos que en un recipiente con agua flota un corcho. De acuerdo con (95) la razón entre el volumen del corcho, sumergido en el agua y el volumen total del corcho es igual a la razón entre las densidades del corcho y del agua, es decir.

$$v_1/v = \rho_3/\rho \qquad (97)$$

Supongamos que el recipiente se encuentra dentro de un ascensor que empieza a descender con cierta aceleración a. Puesto que en este caso las densidades del corcho y del agua no cambian, la razón (97) continúa siendo válida. Es decir, al moverse el ascensor con aceleración, la posición del corcho respecto al nivel del agua en el recipiente es precisamente la misma que en ausencia de aceleración. Es evidente que esta posición tampoco variará en el caso limite cuando a = g, que corresponde a la imponderabilidad. Así pues, la posición del corcho respecto al nivel del agua, la cual se determina por medio de la ley de Arquímedes, no depende de la aceleración del ascensor y en este caso no observamos diferencia alguna entre la imponderabilidad y la ausencia de ésta.

PROFESOR: Los dos razonamientos estuvieron bien argumentados, no obstante, debo manifestar que estoy de acuerdo con el estudiante A, en el estado de imponderabilidad no se cumple la ley de Arquímedes.

ESTUDIANTE B: Pero entonces usted debe refutar mis demostraciones.

PROFESOR: Ahora trataré de hacerlo. Sus razonamientos se basan en dos argumentos principales. Primero: en presencia de una aceleración a ‹ g el cuerpo es empujado por el líquido totalmente de acuerdo con la ley de Arquímedes; segundo: esta afirmación debe ser válida también en el caso limite, cuando a = g, es decir, cuando surge la imponderabilidad. Estoy de acuerdo con la primera afirmación mientras que no lo estoy con la segunda.

ESTUDIANTE B: ¡El corcho en el recipiente permanece en la misma posición incluso en el estado de imponderabilidad! Pero su posición está determinada por la ley de Arquímedes.

PROFESOR: Sí, es verdad, en la imponderabilidad el corcho permanece en la misma posición. Sin embargo, en este estado su posición respecto al nivel del líquido ya no está definida por la ley de Arquímedes. En estas condiciones, hunda el corcho dentro del agua y observará que éste se mantendrá inmóvil a la misma profundidad, a la cual Ud. lo ha llevada, mientras que en presencia de la más mínima diferencia (g — a), el corcho al instante saldrá a flote y ocupará la posición, determinada por la ley de Arquímedes. De esta manera, entre los casos de imponderabilidad y «ponderabilidad», aunque sea mínima, existe una diferencia fundamental. Es decir, al pasar al estado de imponderabilidad, «en el último instante», se lleva a cabo un «salto» que cambia cualitativamente la situación.

ESTUDIANTE B: Pero, ¿con qué está relacionado dicho salto? ¿Por qué aparece? No obstante que nosotros hemos hecho variar muy paulatinamente la aceleración a hasta alcanzar el valor g?

PROFESOR: Este salto está relacionado con el hecho de que para a = g aparece una simetría: desaparece la diferencia entre «arriba» y «abajo», a propósito, esto lo indicó muy bien el estudiante A. Si hay una diferencia (g — a), por pequeña que esta sea, pero diferente de cero, en el problema habrá una dirección definida de «abajo hacia arriba». Precisamente en esta dirección actúa el empuje. Sin embargo, para a = g esta dirección desaparece, y todas las direcciones se vuelven físicamente equivalentes. En esto consiste el salto. La destrucción o la aparición de la simetría siempre se lleva a cabo en forma de salto.

Capítulo 9

La física moderna está basada fundamentalmente en la física molecular. Por lo tanto, es especialmente importante, aunque sea en el ejemplo sencillo de un gas ideal, estudiar los fundamentos de la teoría cinético-molecular de las sustancias. Analizaremos por separado el problema acerca de las peculiaridades de la dilatación del agua. Estudiaremos detalladamente las leyes de los gases y su utilización en la resolución de problemas técnicos concretos.

§ 18. ¿QUE SABE UD. DE LA TEORÍA CINÉTICO-MOLECULAR DE LAS SUSTANCIAS?

PROFESOR: Entre las preguntas de los exámenes figura la siguiente: cuáles son los fundamentos de la teoría cinético-molecular de las sustancias. ¿Cómo respondería usted a esta pregunta?

ESTUDIANTE A: Usted ha citado dos aspectos fundamentales. Primero: todos los cuerpos están compuestos de moléculas. Segundo: las moléculas se encuentran en constante movimiento térmico caótico.

PROFESOR: Su respuesta es muy común: lacónica e incompleta. He observado que los estudiantes están acostumbrados a tratar esta pregunta de manera demasiado formal. Casi siempre ellos no saben qué hay que decir acerca de los aspectos fundamentales de la teoría cinético-molecular y buscan la salida con algunas frases generales. Respecto a esto, yo juzgo necesario hablar acerca de la teoría cinético-molecular de las sustancias de manera detallada. Primero que todo quiero recalcar los aspectos de esta teoría, que se puede considerar como fundamentales.

1. Las sustancias tienen una estructura «granulosa»: toda sustancia está constituida de moléculas (átomos). Una molécula-gramo de una sustancia cualquiera contiene $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ moléculas, independientemente de su estado (el número N_A se denomina número de Avogadro).
2. Las moléculas se encuentran en continuo movimiento térmico.
3. El carácter del movimiento térmico de las moléculas depende del carácter de las interacciones de éstas y cambia cuando la sustancia pasa de un estado a otro.
4. La intensidad del movimiento térmico molecular depende del grado de calentamiento del cuerpo, que se caracteriza por su temperatura absoluta T. Teóricamente está demostrado que la energía promedio ε de una molécula es proporcional a la temperatura T; así, por ejemplo, para las moléculas monoatómicas

$$\varepsilon = 3/2\ \kappa/T \qquad (98)$$

   donde $\kappa = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/grad es una constante física, denominada constante de Boltzmann.
5. Desde el punto de vista de la teoría cinético-molecular, la energía total E de un cuerpo es igual a la suma de los siguientes términos:

$$E = E_c + E_p + U \qquad (99)$$

donde E_c es la energía cinética del cuerpo en total, E_p es su energía potencial y U es la energía relacionada con el movimiento térmico de las moléculas del cuerpo. La energía U se denomina energía interna del cuerpo. La consideración de la energía interna de un cuerpo al analizar las diferentes equiparticiones energéticas es un aspecto característico de la teoría cinético-molecular.

ESTUDIANTE B: Nosotros nos hemos acostumbrado a que la pregunta acerca de las moles y del número de Avogadro se refieren a la Química.

PROFESOR: Seguramente, a esto se debe el hecho de que los estudiantes en el examen de física con frecuencia no saben qué es una molécula-gramo y por lo general siempre afirman que el número de Avogadro se refiere precisamente a los gases. No olviden: una molécula-gramo es el número de gramos de una sustancia, igual numéricamente a su peso molecular (y no es el peso de una molécula, expresado en gramos, como se puede oír a veces); un gramo-átomo es el número de gramos de una sustancia, numéricamente igual a su peso atómico; el número de Avogadro es el número de moléculas que contiene una molécula-gramo (o el número de átomos en un gramo-átomo) de cualquier sustancia independientemente de su estado.

Quisiera anotar que el número de Avogadro juega un papel como dijéramos de «puente» entre las características macroscópicas y microscópicas de una sustancia. Así, por ejemplo, utilizando el número de Avogadro, se puede expresar por medio de la densidad y del peso molecular (atómico) de una sustancia, una característica microscópica tal como la distancia media entre las moléculas (átomos) de una sustancia. Tomemos como ejemplo el hierro sólido. Su densidad ρ = 7,8 g/cm^3, su peso atómico A = 56.

Determinemos la distancia promedio entre los átomos del hierro. Razonaremos de la siguiente manera: A gramos de hierro contienen N_A átomos; es decir, 1 g de hierro contiene N_A/A átomos; de aquí se deduce que en 1 cm^3 de hierro están contenidos ρN_A/A átomos. De esta manera, un átomo de hierro encierra un volumen A/(ρN_A) cm^3. La distancia promedio entre los átomos es aproximadamente igual a la raíz cúbica de dicho volumen:

$$x \approx \sqrt[3]{A(\rho N_A)} = \sqrt[3]{\frac{56}{7{,}8 \cdot 6 \cdot 10^{23}}}\,cm \approx 2 \cdot 10^{-8} cm$$

ESTUDIANTE B: Usted indicaba antes, que el carácter del movimiento térmico de las moléculas dependía de las interacciones intermoleculares y que variaba al pasar de un estado a otro. Explíqueme, por favor, esto más detalladamente.

PROFESOR: La interacción de dos moléculas se puede describir cualitativamente con ayuda de la curva, representada en la figura 69.

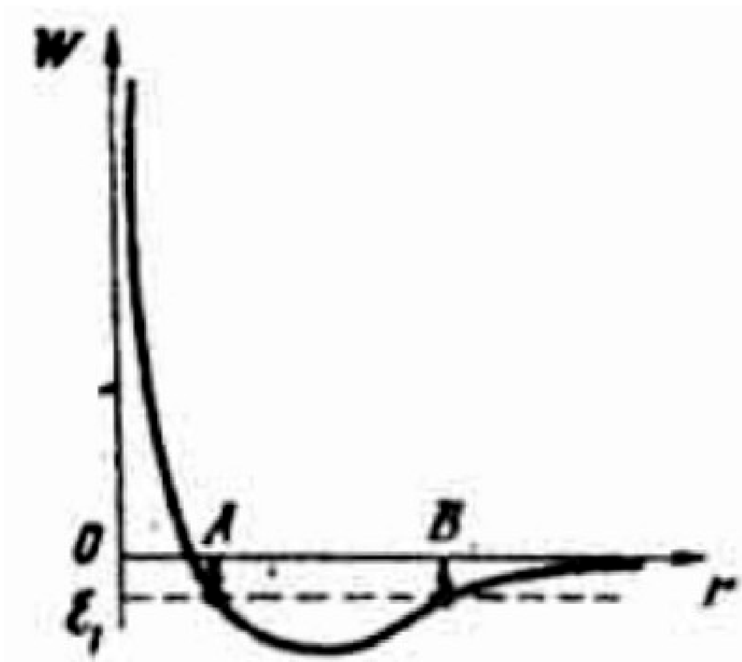


Figura 69.

Esta curva caracteriza la dependencia de la energía potencial W de la interacción de las moléculas a una distancia r entre tos centros de las moléculas. Para distancias suficientemente grandes entre las moléculas la curva W(r) tiende asintóticamente a cero, es decir, las moléculas prácticamente dejan de interaccionar. A medida que las moléculas se acercan unas a otras aparecen las fuerzas de atracción y la curva W(r) desciende. Luego, cuando las moléculas están lo suficientemente cercanas entre sí, éstas empiezan a repelerse y la curva W(r) empieza a crecer (esta repulsión significa que las moléculas no pueden penetrar libremente una dentro de otra). Se puede apreciar fácilmente, que la curva W(r) tiene un mínimo característico.

ESTUDIANTE B: ¿Qué significa una energía negativa?

PROFESOR: Como es sabido, la energía se puede medir con relación a un valor cualquiera. Por ejemplo, se puede medir la energía potencial de una piedra respecto al nivel de un lugar dado o respecto al nivel del mar, esto es indiferente. En el caso que estamos tratando se toma como cero la energía de interacción de las moléculas situadas a una distancia infinita unas de otras. Por esta razón, la energía negativa de una molécula significa que ésta se encuentra ligada a otra molécula. Para «liberar» dicha molécula, es necesario proporcionarle cierta energía para que la energía de la molécula alcance el nivel cero. Supongamos que la molécula tiene una energía negativa ε_1 (ver figura 69). De la gráfica se puede apreciar que en dado caso la molécula no puede escaparse de su vecina más allá del punto B y no puede acercarse a esta misma más que hasta el punto A. O sea, que la molécula va a oscilar entre los puntos A y B en el campo de su molécula vecina (hablando más exactamente tendrán lugar oscilaciones relativas de las dos moléculas que forman un sistema ligado). En un gas las moléculas en promedio se encuentran a distancias tan grandes una de la otra, que prácticamente podemos considerar que éstas no interaccionan. Cada molécula se mueve libremente, es decir, independientemente de las otras, experimentando relativamente pocos choques. Cada molécula puede experimentar tres clases de movimientos: de traslación, rotacional (la molécula gira alrededor de sí misma) y oscilatorio (los átomos oscilan dentro de la molécula). Si la molécula es monoatómica, tiene lugar solamente el movimiento de traslación.

En un cristal las moléculas se encuentran tan cerca una de otra que todas juntas forman un solo sistema ligado.

En este caso cada molécula oscila en un campo de fuerzas resultantes, condicionado por la interacción de todo el conjunto de moléculas. Para todo cristal, como sistema único ligado de moléculas es característica la existencia de una estructura espacialmente ordenada, es decir, el retículo cristalino. Los nudos del retículo cristalino son las posiciones de equilibrio de las moléculas. Cerca a estas posiciones las moléculas ejecutan sus movimientos oscilatorios complejos. Se debe anotar, que en ciertos casos, las moléculas al formar el cristal continúan conservando en cierta medida su individualidad y entonces, es necesario distinguir las oscilaciones de las moléculas en el campo del cristal de las oscilaciones de los átomos dentro de las moléculas. Este fenómeno tiene lugar, cuando la energía de ligación de los átomos dentro de la molécula es considerablemente mayor que la energía de la ligación de las mismas moléculas en el retículo cristalino. Sin embargo, en la mayoría de los casos las moléculas al formar el cristal no conservan su individualidad, de tal manera que resulta formado no por moléculas separadas, sino por átomos separados. En este caso las oscilaciones intermoleculares, evidentemente, no tienen lugar y oscilan solamente los átomos dentro del campo del cristal: He aquí los conocimientos mínimos acerca del carácter de los movimientos térmicos de los átomos y de las moléculas de las sustancias que debe saber cada examinando. Generalmente los examinandos al hablar del movimiento térmico en una sustancia. se limitan a una simple frase: «movimiento caótico», ocultando con ello el desconocimiento de aspectos más detallados sobre el movimiento térmico.

ESTUDIANTE B: Pero usted no ha dicho nada acerca del movimiento térmico de las moléculas en un líquido.

PROFESOR: El movimiento térmico en un líquido es más confuso y complicado. Como un líquido ocupa una posición intermedia entre un gas y un cristal, tiene además de las interacciones fuertes entre las partículas, una estructura en cierta forma poco ordenada. Las dificultades en el estudio de los cristales, debidas a la existencia de interacciones fuertes entre las partículas, se compensan en bastante grado por la presencia de una estructura ordenada, esto es, del retículo cristalino. Las dificultades en el estudio de los gases debidas a las posiciones desordenadas de las partículas en parte se compensan por la ausencia, prácticamente, de las interacciones entre partículas. En el caso de los líquidos se tienen los dos tipos de dificultades que hemos indicado y sin existir al mismo tiempo factores compensativos. Se puede afirmar que en un líquido las moléculas conservan casi totalmente su carácter individual. Para los líquidos es una característica la existencia de un variado tipo de movimientos: desplazamiento de las moléculas, rotación de las moléculas, oscilaciones de los átomos dentro de cada molécula, oscilaciones de las moléculas en el campo de las moléculas vecinas. Lo más complejo de esto es que todos estos tipos de movimientos no se puede, hablando rigurosamente, analizar por separado: existe una estrecha influencia mutua entre estos movimientos.

ESTUDIANTE B: No me explico cómo se puede reunir el movimiento de traslación de una molécula con las oscilaciones de la molécula en el campo de sus vecinas.

PROFESOR: Existen diferentes modelos, con los cuales se trata de reunir los movimientos que hemos indicado. Por ejemplo, en uno de los modelos se supone, que la molécula se comporta así: cierto tiempo oscila en el campo creado por las moléculas vecinas a ella, luego da un salto y pasa a otra vecindad, oscila en este nuevo lugar, para luego realizar un nuevo salto y etc. Este modelo se denomina «modelo de difusión por saltos».

ESTUDIANTE B: Me parece que, precisamente en esta forma debe llevarse a cabo la difusión de los átomos en los cristales.

PROFESOR: Es cierto. Sólo que usted debe anotar que, en el caso de los cristales este proceso es más lento: los saltos a los lugares vecinos se hacen menos frecuentemente. Existe otro modelo, según el cual la molécula en un líquido se comporta de la siguiente manera: oscila en los alrededores de las moléculas vecinas, y en conjunto la molécula con sus alrededores se desplaza suavemente en el espacio («nada») y simultáneamente se deforma. Dicho modelo recibe el nombre de «modelo de difusión continua».

ESTUDIANTE B: Usted ha dicho que el líquido ocupa una posición intermedia entre los cristales y los gases. ¿A cuál de ellos está más cercano?

PROFESOR: ¿Cómo cree usted?

ESTUDIANTE B: Me parece que un líquido se asemeja más a un gas.

PROFESOR: Sin embargo, en realidad, un líquido es más parecido a un cristal: esto lo indica la similitud de los valores de las densidades, de los calores específicos y de los coeficientes de dilatación volumétrica de los líquidos y cristales. También se sabe que el calor de fusión es considerablemente menor que el calor de evaporación. Todos estos factores testimonian la notable analogía de las fuerzas de cohesión de las partículas en los cristales y en los líquidos. Una consecuencia de dicha analogía es también la presencia en los líquidos de cierta ordenación en la distribución de sus átomos comprobada en los experimentos de la dispersión de los rayos X, y que recibe el nombre de «ordenación limitada».

ESTUDIANTE B: ¿Qué significa este término?

PROFESOR: Ordenación limitada quiere decir una distribución ordenada cerca a un átomo (molécula) escogido arbitrariamente de un cierto número de los átomos (moléculas) cercanos. Al contrario de lo que sucede en un cristal esta disposición ordenada con relación a un átomo escogido no se conserva a medida que nos alejamos de éste y no conduce a una formación del retículo cristalino. Sin embargo, para distancias pequeñas es bastante semejante a la disposición de los átomos de la sustancia considerada en estado sólido. En la figura 70 a, se indica una ordenación ilimitada para una cadena de átomos, la cual se compara con la ordenación limitada, representada en la figura 70 b.

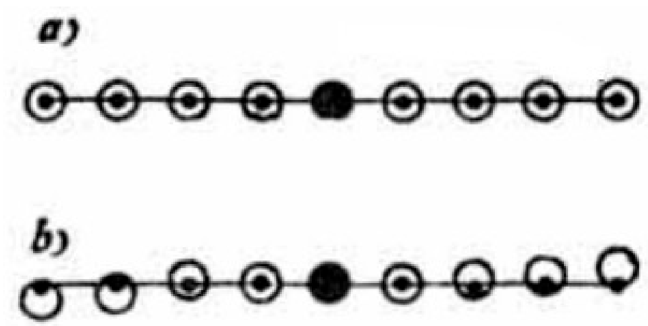


Figura 70.

La presencia de la analogía entre los líquidos y los cristales ha conducido a la aparición del término «cuasi-cristalina» para los líquidos.

ESTUDIANTE B: ¿Pero, según esto, a los líquidos se los puede analizar en forma análoga que a los cristales?

PROFESOR: Es necesario cuidarse de no abusar del concepto de cuasi-cristalidad para un líquido y atribuirle de pronto un significado mayor, el cual no se justifique. Antes que todo, hay que tener en cuenta, que al estado líquido le corresponde una amplia gama de temperaturas, y no hay que esperar que las propiedades dinámico-estructurales de un líquido resulten las mismas (o inclusive aproximadamente iguales) en una gama amplia de temperaturas. Cerca del estado crítico el líquido debe perder toda similitud con el estado sólido y en forma paulatina pasar a la fase gaseosa. Así pues, aunque el concepto de cuasi-cristalidad de un líquido se justifica, de todas maneras, no podrá aceptarse demasiado lejos del punto de fusión. Por otra parte, el carácter de la interacción de las moléculas es diferente para diferentes líquidos, debido a lo cual el concepto de cuasi-cristalidad se puede aplicar a diferentes líquidos en grados diferentes. Así, por ejemplo, el agua resulta ser un líquido más cuasi-cristalino, que los metales fundidos y esto le proporciona una serie de propiedades especiales (ver § 19).

ESTUDIANTE B: Veo que no existe una descripción sencilla del movimiento térmico de las moléculas de un líquido.

PROFESOR: Así es. Resultan relativamente fáciles solamente los casos extremos. El caso intermedio es siempre complejo.

ESTUDIANTE A: En el programa de admisión figura la siguiente pregunta: ¿cuáles son los fundamentos de la teoría cinético-molecular de las sustancias? ¿Supongo que aquí habrá que hablar del movimiento browniano?

PROFESOR: Si, el movimiento browniano es un fundamento experimental muy claro de los aspectos básicos de la teoría cinético-molecular, Pero, ¿usted sabe qué es el movimiento browniano?

ESTUDIANTE A: Es el movimiento térmico de las moléculas.

PROFESOR: Se equivoca: ¡el movimiento browniano se puede observar con ayuda de microscopios simples! Se trata del movimiento de partículas separadas de una sustancia por la acción de los choques de las moléculas del medio, que se encuentran en movimiento térmico. Estas partículas, desde el punto de vista molecular, son cuerpos macroscópicos.

Sin embargo, desde el punto de vista de nuestras escalas corrientes, éstas son muy pequeñas. Como resultado de los choques aleatorios no compensados de las moléculas, las partículas brownianas realizan desplazamientos caóticos y con ello se desplazan dentro del medio, en calidad del cual utilizan un líquido cualquiera.

ESTUDIANTE B: ¿Por qué razón las partículas brownianas deben ser relativamente pequeñas? ¿Por qué el movimiento browniano no se observa para granos más palpables de una sustancia, por ejemplo, para las partículas del té en un vaso?

PROFESOR: Esto se explica por dos causas. Primero, porque el número de choques de las moléculas contra la superficie de la partícula es proporcional al área de dicha superficie; la masa de la partícula es proporcional al volumen de ésta. De esta manera, al aumentar el tamaño R de la partícula el número de choques de las moléculas contra la superficie de aquélla crece como R^2; mientras que la masa de la partícula, la cual debe desplazarse por la acción del choque, crece como R^3. Por esta razón a las moléculas les queda cada vez más difícil mover la partícula. Para mayor claridad, trazaré en la figura 71 dos gráficas: $y = R^2$ e $y = R^3$.

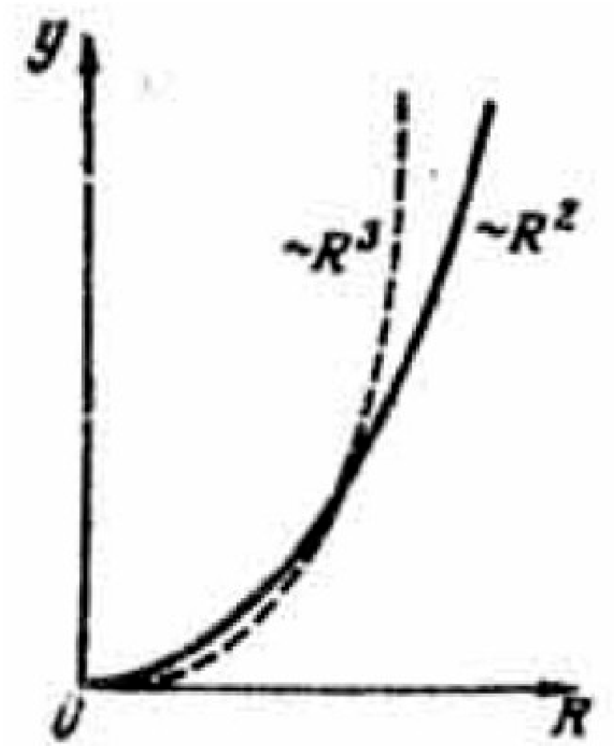


Figura 71.

Se aprecia fácilmente, que la dependencia cuadrática predomina para pequeños valores de R y la dependencia cúbica para valores grandes de R. Esto significa, que para valores menores de R deben predominar los efectos superficiales, mientras que para valores mayores de R deben predominar los efectos volumétricos. Segundo, porque la partícula browniana debe ser pequeña, ya que se necesita que haya choques de las moléculas que no se compensan, es decir, el número de choques en la unidad de tiempo, contra la partícula sobre el lado izquierda de ésta y el número de choques en la unidad de tiempo sobre el lado derecho deben ser considerablemente diferentes y la razón entre la diferencia del número de choques en uno y otro lado y el número total de choques será mayor, cuanto menor sea la superficie de la partícula.

ESTUDIANTE A: ¿Qué otros fundamentos de la teoría cinético-molecular es necesario saber?

PROFESOR: El mejor argumento de la teoría cinético-molecular son los éxitos logrados por esta teoría en la explicación de una serie de fenómenos físicos. Como ejemplo daremos la explicación de la presión que ejerce un gas sobre las paredes de un recipiente. La presión p es la componente normal de la fuerza F, que actúa sobre la unidad de superficie de la pared. Puesto que

$$F = m(\Delta v/\Delta t) = \Delta(mv)\Delta t \qquad (100)$$

para el cálculo de la presión p es necesario determinar la cantidad de movimiento, transmitida a la unidad de superficie de la pared en la unidad de tiempo por acción de los choques de las moléculas del gas. Supongamos que perpendicularmente a la pared se desplaza una molécula de masa m con una velocidad v. Como resultado de un choque elástico contra la pared, la molécula invierte el sentido de su movimiento y se aleja de la pared con velocidad v. La variación de la cantidad de movimiento de la molécula es igual a $\Delta(mv) = m\Delta v = m \cdot 2v$. Esta es la cantidad de movimiento que se le trasmite a la pared. Para mayor sencillez vamos a suponer que todas las moléculas del gas tienen la misma velocidad v y 6 direcciones de su movimiento: en ambos sentidos para los tres ejes de coordenadas (digamos que la pared está orientada perpendicularmente a uno de los ejes). Consideramos luego que en la unidad de tiempo alcanzan la pared solamente aquellas moléculas que se encuentran a una distancia de ésta no mayor que la magnitud de v y cuyas velocidades están dirigidas hacia la pared. Si en la unidad de volumen de gas se encuentran N/V moléculas. en la unidad de tiempo chocarán contra la unidad de superficie de la pared $1/6 \cdot (N/V)v$ moléculas. Puesto que cada una de estas moléculas le trasmite a la pared-una cantidad de movimiento igual a 2mv, como resultado del choque la pared recibe una cantidad de movimiento igual a $2mv \cdot (1/4) \cdot (N/V)v$. Según la fórmula (100) ésta será la presión p que buscamos. De esta manera tendremos que

$$p = 2/3(N/V)mv^2/2 \qquad (101)$$

De acuerdo con (98) en lugar de la energía $mv^2/2$ de una molécula escribimos la cantidad 3/2 κT (para el movimiento de traslación de las moléculas, la fórmula (98) es válida para las moléculas de cualquier número de átomos). Después de esto, la expresión (101) se puede escribir en la forma

$$pV = N\kappa T \qquad (102)$$

Es de anotar que aunque esta expresión se obtuvo luego de varias simplificaciones (por ejemplo, se supuso que las moléculas del gas se mueven con una misma velocidad). sin embargo, como lo demuestra la teoría, este resultado coincide totalmente con el calculado rigurosamente.

La relación (102) se comprueba muy exactamente cuando hacemos directamente las mediciones. Esto es un buen índice, de que los conceptos enunciados en la teoría cinético-molecular y que utilizamos en la deducción de la relación (102) son correctos.

Analicemos ahora, basándonos en los argumentos de la teoría cinético-molecular, los fenómenos de la evaporación y la ebullición de un líquido. ¿Cómo explica usted el fenómeno de la evaporación?

ESTUDIANTE A: Este fenómeno consiste en que las moléculas más rápidas de un líquido vencen las fuerzas de atracción de las demás moléculas y se salen del líquido.

PROFESOR: ¿Qué factores hacen aumentar la evaporación?

ESTUDIANTE A: Primero, el aumento de la superficie del líquido, segundo, el calentamiento del líquido.

PROFESOR: Debemos tener en cuenta que el proceso de evaporación no es un proceso unilateral sino bilateral; al escapar una parte de las moléculas del líquido simultáneamente regresa otra parte de estas moléculas al líquido. Cuanto mayor sea el número de moléculas que escapan del líquido que el número de moléculas que regresa a éste tanto más efectivo será el proceso de evaporación. El calentamiento del líquido y el aumento de su superficie aceleran el efecto de escape de las moléculas del líquido. Además de esto, para acelerar la evaporación se puede tomar medidas para disminuir el proceso inverso, es decir, disminuir el número de moléculas que regresan al líquido. Por ejemplo, cuando hace viento, las moléculas que salen del líquido son lanzadas a un lado y con esto disminuye la probabilidad de que éstas caigan de nuevo en el líquido. Por esta razón es que los objetos húmedos se secan más rápido expuestos al viento.

Si el número de moléculas que escapa del líquido y el número de éstas que regresa se compensan, se establece un estado de equilibrio dinámico y el vapor que se encuentra sobre la superficie del líquido se satura. En algunos casos es conveniente detener el proceso de evaporación. Por ejemplo, no es conveniente que la humedad del pan se evapore rápidamente. Para evitar que el pan se reseque prematuramente, lo introducen en un recipiente cerrado (en una caja o talego). De esta manera, se crea una barrera para las moléculas que se evaporan y sobre la superficie del pan se forma una capa de vapor saturado, que impide la evaporación del agua del pan.

Ahora, explique usted el proceso de la ebullición.

ESTUDIANTE A: La ebullición es el mismo proceso que la evaporación, pero que se lleva a cabo en forma más intensa.

PROFESOR: Su definición de la ebullición no me gusta en absoluto. Debo anotar que muchos examinandos no comprenden la esencia de este proceso. Al calentar un líquido disminuye la solubilidad de los gases que en éste se encuentran y como resultado de esto, dentro del líquido (en el fondo y en las paredes del recipiente) aparecen burbujas de gas, en las cuales se lleva a cabo la evaporación. Las burbujas se llenan de vapor saturado, cuya presión crece al aumentar la temperatura. A cierta temperatura la presión del vapor saturado dentro de las burbujas se hace igual a la presión externa (esta presión es igual a la suma de la presión atmosférica y de la presión debida a la capa de agua). A partir de este instante, las burbujas se elevan y el líquido hierve. Como puede apreciar, la ebullición de un líquido se diferencia esencialmente de la evaporación. Notemos que la evaporación se realiza a cualquier temperatura, mientras que, la ebullición tiene lugar a una temperatura determinada, que se denomina punto de ebullición. Recordemos que si el proceso de ebullición ha empezado, la temperatura del líquido no aumenta, aunque continuemos comunicándole calor sino que permanece fija en el punto de ebullición hasta que se lleve a cabo la ebullición de todo el líquido.

Vemos de estos razonamientos que al disminuir la presión exterior baja el punto de ebullición de un líquido. En relación con esto sugiero que analicemos el siguiente problema. *En un matraz se encuentra una cantidad pequeña de agua a la temperatura ambiente. Con ayuda de una bomba empezamos a extraer el aire que se encuentra en el matraz sobre el agua. ¿Qué sucederá con el agua?*

ESTUDIANTE A: A medida que extraemos el aire disminuye la presión sobre el matraz. Al disminuir la presión, baja el punto de ebullición del agua. Cuando el punto de ebullición se hace igual a la temperatura ambiente, el agua en el matraz comenzará a hervir.

PROFESOR; ¿Puede ser que el agua se congele en lugar de hervir?

ESTUDIANTE A: No sé. Creo que no.

PROFESOR: Depende de cómo se lleva a cabo el proceso de extracción del aire del matraz. Si el proceso se realiza lentamente, el agua deberá hervir tarde o temprano. Si por el contrario la extracción tiene lugar en forma bastante rápida, el agua se congela. Como resultado de la extracción del aire y junto con éste la extracción de los vapores de agua, se intensifica el proceso de evaporación. Puesto que al evaporarse el agua escapan de ésta las moléculas de mayor energía, esto conduce al enfriamiento del agua. En caso de una extracción lenta, el enfriamiento del agua se compensa con el flujo calorífico externo y debido a esto la temperatura del agua se mantiene fija. Cuando la extracción del aire se realiza en forma suficientemente rápida, el flujo calorífico exterior no alcanza a compensar el enfriamiento del agua y entonces la temperatura del agua empieza a bajar. Tan pronto la temperatura del agua empieza a bajar, disminuye la posibilidad de su ebullición. Si continuamos acelerando la extracción del aire del matraz la temperatura del agua continúa disminuyendo hasta llegar al punto de solidez para luego convertirse un cierto residuo de agua en hielo.

§ 19. ¿COMO SE EXPLICA EL CARÁCTER ANÓMALO DE LA DILATACIÓN TÉRMICA DEL AGUA?

PROFESOR: ¿En qué consiste la dilatación térmica del agua?

ESTUDIANTE A: Al calentar el agua desde los 0° C hasta los 4° C su densidad aumenta y solamente cuando se la calienta por encima de los 4° C se dilata.

PROFESOR: ¿Cómo se explica esta anomalía?

ESTUDIANTE A: No lo sé.

PROFESOR: Para explicar esta particularidad del agua hay que hacer un estudio de su estructura atómica. Las moléculas del agua interaccionan entre sí en forma ordenada, es decir, cada una de ellas puede atraer solamente a 4 de sus moléculas vecinas, cuyos centros como resultado de esta unión forman un tetraedro (figura 72).

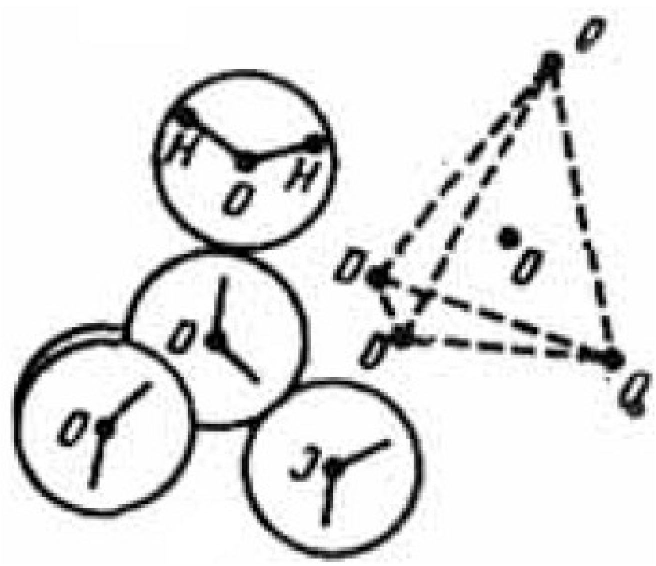


Figura 72.

Como consecuencia de esto, se forma una estructura granulosa y calada, que da testimonio al carácter cuasi-cristalino del agua. Se sobreentiende que al hablar de la estructura del agua, como de la de cualquier otro líquido, nos referimos únicamente a la ordenación limitada (ver § 18). A medida que crece la distancia respecto a la molécula considerada, se apreciará gradualmente la alteración de dicha ordenación, debido a la flexión y rompimiento de los enlaces intermoleculares. Los enlaces entre las moléculas a medida que aumenta la temperatura se destruyen más a menudo y crece el número de moléculas con enlaces libres que vienen a ocupar los espacios vacios de la estructura tetraédrica y disminuye el grado cuasi-cristalino del agua. La estructura calada del agua como sustancia cuasi-cristalina explica debidamente la anomalía de las propiedades físicas del agua y en particular su anomalía en la dilatación térmica. Por una parte, el aumento de la temperatura conduce al aumento de las distancias medias entre los átomos de cada molécula debido a la amplificación de las oscilaciones en el interior de las moléculas, es decir, es como si éstas se «abultaran» ligeramente. Por otra parte, el aumento de la temperatura provoca el rompimiento de la estructura calada del agua, lo que, naturalmente, conduce a un empaquetamiento más compacto de las mismas moléculas. El primer efecto (efecto de las oscilaciones) debe conducir a una disminución de la densidad del agua. Este es el efecto corriente de la dilatación térmica de los sólidos. El segundo efecto (efecto del rompimiento de la estructura), por el contrario, debe conducir a un aumento de la densidad del agua a medida que se la calienta. Al calentar el agua hasta los 4 °C prima el segundo efecto y por esta razón su densidad aumenta. Por encima de los 4 °C empieza a primar el efecto de las oscilaciones, y por esto la densidad del agua disminuye.

§ 20. ¿COMPRENDE USTED BIEN LAS LEYES DE LOS GASES?

PROFESOR: Escriba la ecuación general de los gases de estado de las gases ideales (perfectos).

ESTUDIANTE A: Esta ecuación se escribe así:

$$pV/T = p_0V_0/T_0 \qquad (103)$$

donde p, V, T son la presión, el volumen y la temperatura de una masa de gas que se encuentra en cierto estado y p_0, V_0 y T_0 son las mismas magnitudes en el estado inicial. Aquí la temperatura se expresa en una escala absoluta.

ESTUDIANTE B: Yo prefiero utilizar esta ecuación en otra forma:

$$pV = m/\mu \cdot RT \qquad (104)$$

donde m es la masa del gas, μ, la masa de un mol y R es la constante universal de los gases.

PROFESOR: Las dos formas de escribir la ecuación de estado de un gas son correctas. (Dirigiéndose al estudiante B): Usted utiliza la constante universal de los gases. ¿Cómo calcularla usted dicha constante? Dudo que usted pueda recordar su valor numérico.

ESTUDIANTE B: Para calcular R utilizo la expresión (103), en la cual los parámetros p_0, V_0 y T_0 se refieren a una masa dada de gas en condiciones normales. Es decir, p_0 = 76 cm Hg, T_0 = 273 °K y V_0 = (m/μ)·22,4 l, ya que un mol de un gas cualquiera en condiciones normales ocupa un volumen determinado e igual a 22,4 l. La relación m/μ, es el número de moles contenidas en la masa de gas considerada. Al colocar todos estos valores en (103). Obtenemos

$$pV = (m/\mu)\ T\ (76 \text{ cm Hg} \cdot 22{,}4 \text{ l}/273°$$

Comparando este resultado con la expresión (104), hallamos que

$$R = 6{,}2 \text{ (cm Hg)} \cdot \text{l/grad}$$

PROFESOR: Yo especialmente le solicité hacer estos cálculos para demostrar la equivalencia de las expresiones (103) y (104). Desafortunadamente, los estudiantes por lo general sólo conocen la expresión (103) y desconocen la relación (104) que coincide con la que obtuvimos antes a partir de consideraciones basadas en la teoría cinético-molecular (102). Comparando las fórmulas (102) y (104) se deduce que

$$(m/\mu)R = N\ \kappa$$

De donde encontramos

$$R = \frac{N}{m/\mu}\kappa = N_A\kappa \qquad (105)$$

De esta manera, la constante universal de los gases es el producto del número de Avogadro por la constante de Boltzmann. Ahora comprobaremos si usted sabe utilizar correctamente la ecuación de estado de los gases ideales. Dibuje la gráfica del proceso isobárico, es decir, del proceso mediante el cual la presión del gas permanece constante, en las coordenadas V y T.

ESTUDIANTE A: Recuerdo que este proceso se describe por medio de una línea recta.

PROFESOR: ¿Para qué trata de recordar? Utilice la ecuación (104), y partiendo de ella, exprese el volumen del gas en función de la temperatura.

ESTUDIANTE A: De la ecuación (104) puedo deducir que

$$V = (m/\mu)\ (R/p)\ T \qquad (106)$$

PROFESOR: ¿En la fórmula (106) la presión depende de la temperatura?

ESTUDIANTE A: En el caso dado no depende, por cuanto nos referimos a un proceso isobárico.

PROFESOR: Está bien. En tal caso el producto $(m/\mu)(R/p)$ en la fórmula (106) es un coeficiente constante. De aquí vemos que existe una dependencia lineal entre el volumen del gas y la temperatura. Los examinandos, por lo general, saben representar los procesos isobárico (p-const), isotérmico (T-const) e isocoro (V-const) en los ejes de coordenadas p, V; mientras que se les dificulta representarlos en otros ejes de coordenadas como, por ejemplo, V, T o T, p.

En la figura 73 están representadas los tres procesos indicados en diferentes ejes de coordenadas.

ESTUDIANTE B: Tengo una pregunta con relación a la isobara en los ejes de coordenadas V, T. De la relación (106) y de la gráfica correspondiente de la figura 73 se aprecia que cuando la temperatura tiende a cero, el volumen del gas debe también tender a cero. Sin embargo, el volumen de un gas en cualquier caso no puede ser menor que la suma total de los volúmenes de sus moléculas. ¿Qué hacer en este caso?

PROFESOR: Las relaciones (102) — (104) y (106) se refieren a un gas ideal. El gas ideal es un modelo simplificado de un gas real, en el cual no se toma en cuenta el tamaño propio de las moléculas ni las fuerzas de atracción entre éstas. Todas las gráficas de la figura 73 se refieren precisamente al modelo simplificado de un gas ideal.

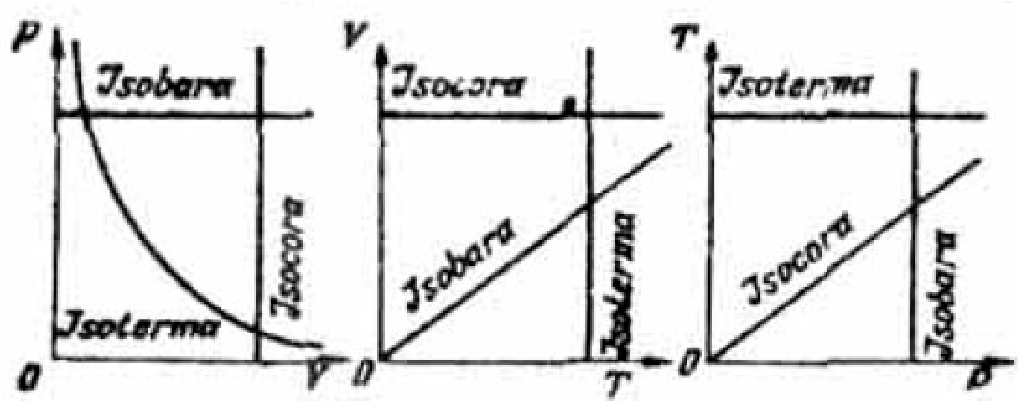


Figura 73.

ESTUDIANTE B: Pero las leyes de los gases se comprueban muy bien experimentalmente. no obstante que todo experimento se lleva a cabo con gases reales, cuyas moléculas tienen su tamaño propio.

PROFESOR: Preste atención al hecho de que esta clase de experimentos no se realiza a temperaturas demasiado bajas. Si un gas real no está demasiado frío ni demasiado comprimido, puede ser descrito con buen grado de aproximación por el modelo de un gas ideal. Debemos anotar que para los gases, contenidos en el aire (por ejemplo, nitrógeno y oxígeno), estas condiciones se cumplen a la temperatura ambiente y a presiones corrientes.

ESTUDIANTE B: Es decir ¿si representamos la gráfica de la dependencia del volumen como función de la temperatura en un proceso isobárico para un gas real, la curva coincidirá con la recta correspondiente de la figura 73 a temperaturas suficientemente elevadas y no coincidirá en la región de bajas temperaturas?

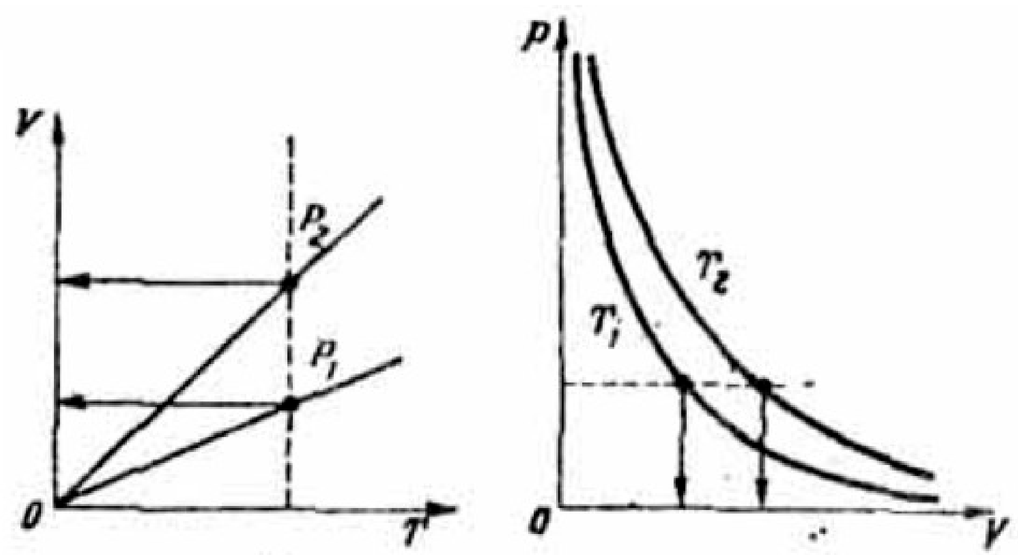
PROFESOR: Exactamente. Además, hay que tener en cuenta que cuando la temperatura desciende lo suficiente, el gas se condensa en un líquido.

ESTUDIANTE B: Entendido. Esto quiere decir sencillamente que el hecho de que la recta (106) en la figura 73 pasa por cero, no tiene ningún significado físico. En tal caso, ¿se podría interrumpir dicha recta de tal manera que no pase por cero?

PROFESOR: No es necesario puesto que usted hablando en rigor, dibuja la gráfica para un modelo de gas. Dónde puede utilizar dicho modelo, ya constituye la segunda pregunta. Quiero hacer la siguiente pregunta: en la figura 74 están representados en los ejes V. T dos isobaras: una de ellas corresponde a la presión p_1 y la otra, a p_2. ¿Cuál de estas presiones es mayor?

ESTUDIANTE A: Seguramente, la presión p_2 es mayor que p_1.

PROFESOR: Usted contestó sin reflexionar Parece que usted resolvió que a la isobara de mayor pendiente le corresponde mayor presión.



Figuras 74 y 75

Sin embargo, no es así. El ángulo de inclinación de una isobara de acuerdo con la expresión (106) es igual a $(m/\mu)(R/p)$. De aquí se concluye que cuanto mayor es la presión, menor es el ángulo de inclinación de la isobara. Es decir, en el caso considerado $p_2 < p_1$. A esta misma conclusión se puede llegar razonando de una manera un poco diferente. Tracemos una isoterma en la figura 74 (ver la línea punteada). Esta isoterma corta a la isobara p_2 en un punto que corresponde a un volumen mayor del gas que el que corresponde al punto de corte con p_1.

Es sabido que para una misma temperatura la presión de un gas será tanto mayor, cuanto menor sea su volumen, lo cual se concluye directamente de la ecuación general de los gases [ver (103) y (104)]. De aquí obtenemos que $p_2 < p_1$.

ESTUDIANTE A: Ahora tengo esto bien claro.

PROFESOR: Fíjese entonces en la figura 75, en la cual están indicadas las isotermas (en los ejes p, V) trazadas para una misma masa de gas a diferentes temperaturas T_1 y T_2 ¿Cuál temperatura es mayor?

ESTUDIANTE A: Trazo una isobara (línea punteada en la figura 75). A presión constante el volumen de un gas es tanto mayor cuanto mayor sea su temperatura, esto es, la isoterma exterior T_2 corresponde a una temperatura más alta.

PROFESOR: Correctamente. Recuerde: cuanto más cerca se encuentre una isoterma del origen de coordenadas p, V, tanto más baja es su temperatura.

ESTUDIANTE B: Los conocimientos que yo tengo sobre las leyes de los gases son muy limitados. Nosotros prácticamente no hicimos un análisis detallado de la ecuación general de los gases y nos limitamos al estudio de las leyes de Boyle-Mariotte, Gay-Lussac y Charles. Analizamos precisamente estas tres leyes.

PROFESOR: Quiero hacer algunas observaciones relativas a esto y que permiten incluir las leyes de Boyle-Mariotte, Gay-Lussac y Charles en un esquema general. La ley de Boyle-Mariotte describe la dependencia de la presión p del volumen V en un proceso isotérmico. La ecuación de esta ley es

$$p = \text{const}/V \qquad (107)$$

donde const = $(m/\mu)RT$.

La ley de Gay-Lussac describe la dependencia de p como función de T en un proceso isocoro. La ecuación de esta ley se escribe así:

$$p = \text{const}\ T \qquad (108)$$

donde const = (m/μ) (R/V).

La ley de Charles describe la dependencia de V como función de T en un proceso isobárico. Su ecuación es

$$V = \text{const}\ T \qquad (109)$$

donde const = (m/μ) (R/p); la ecuación (109), evidentemente es la misma ecuación (106) . Hagamos las siguientes observaciones con relación a las leyes citadas más arriba:

1. Todas estas leyes se refieren a un gas ideal y se utilizan para los gases reales únicamente por cuanto estos últimos se describen con ayuda del modelo de un gas ideal.
2. Cada una de estas leyes indica la relación entre dos parámetros cualesquiera de un gas bajo la condición de que el tercer parámetro se mantiene constante.
3. Cada una de estas leyes, como se ve fácilmente, es un resultado de la ley general de los gases [ver (104)] la cual establece la dependencia entre los tres parámetros de un gas independientemente de cualquier condición especial.
4. Las constantes que figuran en cada una de las leyes indicadas, pueden ser expresadas no solamente a través de las masas del gas y del tercer parámetro que se mantiene constante, sino también por los mismos dos parámetros tomados para el otro estado de la misma masa de gas. En otras palabras, las leyes de las gases se pueden escribir en la siguiente forma:

$$p = (p_0V_0)/V \qquad (107a)$$

$$p = (p_0T_0)/T \qquad (108a)$$

$$p = (V_0T_0)/T \qquad (109a)$$

ESTUDIANTE A: Creo que ahora entendí cuál es la esencia de las leyes de los gases.

PROFESOR: En ese caso, sigamos adelante. Estudiemos el siguiente ejemplo. Un gas se expande de tal manera que su presión y volumen obedecen a la conclusión

$$pV^2 = \text{const} \qquad (110)$$

Se pide explicar, si el gas se calienta cuando se expande o si por el contrario, se enfría.

ESTUDIANTE A: ¿Por ,qué razón la temperatura del gas debe cambiar?

PROFESOR: Si la temperatura permaneciera constante, esto significaría que el gas se expande según la ley de Boyle Mariotte (107). Para el proceso isotérmico p ~(1/V) mientras que en el ejemplo dado la dependencia entre p y V tiene otro carácter: p ~ ($1/V^2$)

ESTUDIANTE A: ¿Es posible tratar de representar estas dependencias en una gráfica? Estas tendrán la forma indicada en la figura 76.

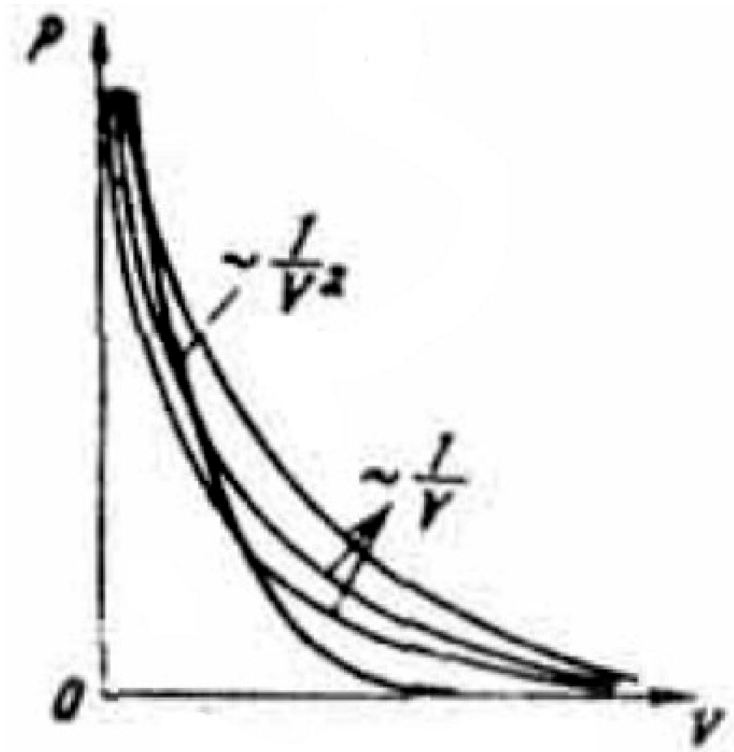


Figura 76.

PROFESOR: Es una buena idea. ¿Qué le dicen a usted esas gráficas?

ESTUDIANTE A: Me parece que he entendido. De las gráficas se puede ver que si seguimos a lo largo de la curva p ~ ($1/V^2$) mientras el volumen del gas crece, el estado del gas va pasando poco a poco a las isotermas internas, decir, a las isotermas de temperaturas cada vez menores. Esto es, en el proceso de expansión considerada, el gas se enfría.

PROFESOR: Correcto. Solamente que es mejor decirlo de otra manera: tal expansión de un gas es posible solamente si el gas se enfría.

ESTUDIANTE B: ¿Seguramente esta conclusión se puede llegar analíticamente?

PROFESOR: Por supuesto. Analicemos dos estados de un gas: p_1, V_1, T_1 y p_2, V_2 y T_2. Para cada uno de estos escribimos la ecuación general de los gases [ver (104)]:

$$p_1V_1 = (m/\mu)\ RT_1$$

$$p_2V_2 = (m/\mu)\ RT_2$$

El proceso considerado de expansión del gas lo expresamos según la condición dada, en la siguiente forma:

$$p_1V_1^2 = p_2V_2^2$$

Colocando en esta última expresión las ecuaciones de los gases escritas arriba, obtenemos

$$(m/\mu)RT_1V_1 = (m/\mu)RT_2V_2$$

Después de simplificar los factores comunes encontramos

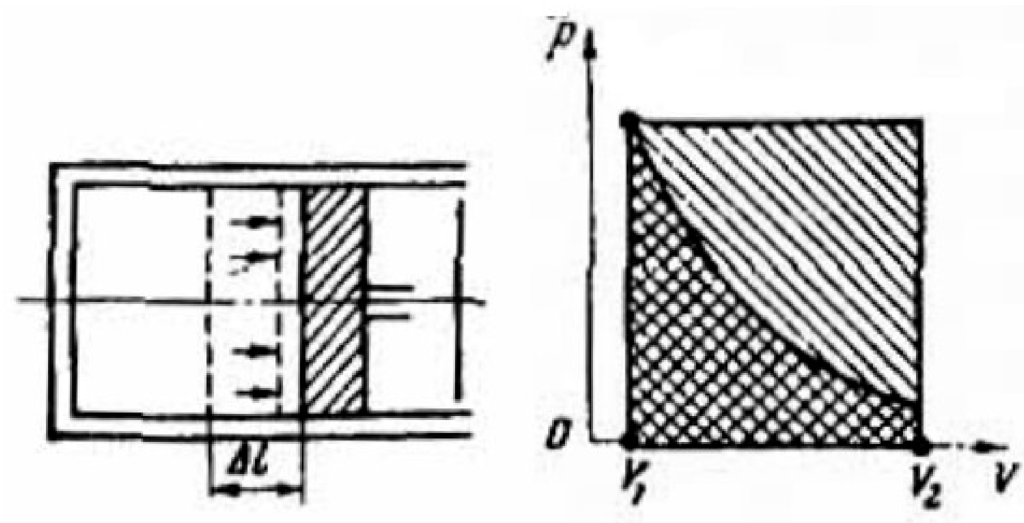
$$T_1V_1 = T_2V_2 \qquad (111)$$

De aquí se aprecia que si el volumen del gas aumenta, por ejemplo al doble, su temperatura, (en la escala absoluta) debe disminuir en la mitad.

ESTUDIANTE A: Es decir, ¿sea cual fuera el proceso considerado, los parámetros del gas (p, V, T) en cada instante de tiempo están relacionados entre sí según la ecuación general de los gases?

PROFESOR: Por supuesto, la ley general de los gases establece la relación entre los parámetros de un gas independientemente de otras condiciones cualesquiera.

Ahora estudiemos el carácter del intercambio de energía de un gas con el medio que lo rodea en los diferentes procesos. Supongamos que un gas se expande. Al hacer esto, el gas va a desplazar a aquellos cuerpos que limitan su volumen (por ejemplo. hace desplazar el émbolo del recipiente que lo contiene). Por consiguiente, el gas realiza un trabajo sobre los cuerpos indicados. Dicho trabajo no es difícil de calcular para la expansión isobárica de un gas. Supongamos que un gas al expandirse isobáricamente desplaza un émbolo de sección transversal S a una longitud Δl (figura 77).



Figuras 77 y 78.

La presión del gas sobre el émbolo es igual a p. Encontremos el trabajo, realizado por el gas sobre el émbolo:

$$A = F \cdot \Delta l — (pS)\, \Delta l = p(S\Delta l) — p(V_2 - V_1) \qquad (112)$$

Aquí V_1 y V_2 son los volúmenes inicial y final del gas respectivamente. En las expansiones no isobáricas, el trabajo del gas se calcula de manera más complicada, ya que en este caso la presión en el transcurso del proceso de expansión del gas varía. En el caso general. el trabajo realizado por un gas al aumentar su volumen de V_1 hasta V_2, es igual al área encerrada bajo la gráfica p(V) del proceso considerado entre las ordenadas V_1 y V_2. En la figura 78 se indican por medio de diferentes trazados las áreas que expresan el trabajo realizado por un gas durante un proceso isobárico y otro isotérmico, al expandirse desde el volumen V_1 hasta el volumen V_2. Los estados iniciales del gas en ambos casos se consideran iguales. Así pues, un gas al expandirse realiza un trabajo sobre los cuerpos que lo rodean a expensas de una parte de su energía interna, al mismo tiempo, el trabajo realizado por el gas depende del carácter del proceso de expansión. Anotamos que si el gas se comprime el trabajo es realizado sobre éste y, por consiguiente, aumenta la energía interna del gas. Sin embargo, la realización de trabajo no es la única forma de intercambio de energía del gas con el medio que lo rodea. Por ejemplo, en la expansión isotérmica, el gas realiza trabajo A y por lo tanto pierde una cantidad de energía igual a A. No obstante, como se puede apreciar de las observaciones del § 18 [ver fórmula (98)], si la temperatura de un gas permanece constante durante un proceso isotérmico esto indica que su energía interna U no varía (recordemos que U se determina por el movimiento térmico de las moléculas, y la energía media de una molécula es proporcional a la temperatura T). Se pregunta: ¿en este caso a expensas de qué se realiza el trabajo A?

ESTUDIANTE B: Seguramente, a expensas del calor comunicado al gas desde afuera.

PROFESOR: Correcto. De esta manera llegamos a la conclusión de que el gas intercambia energía con el medio que lo rodea, como mínimo a través de dos canales: a través del trabajo realizado, relacionado con la variación del volumen del gas, y a través de la transmisión de calor. La equipartición de la energía se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Delta U = Q - A \qquad (113)$$

donde ΔU es el incremento de la energía interna del gas, que se caracteriza por el aumento de su temperatura, Q es el calor que el medio exterior le transmite al gas, A es el trabajo que realiza el gas sobre los cuerpos que lo rodean. La relación (113) se denomina primer principio de la termodinámica. Debemos anotar que este principio tiene carácter general y se aplica no solamente a los gases sino a cualquier clase de cuerpos.

ESTUDIANTE B: De esta manera, durante una expansión isotérmica ¿todo el calor que se le transmite al gas se convierte en trabajo hecho por el gas? Es decir, ¿en un sistema térmicamente aislado no pueden ocurrir procesos isotérmicos?

PROFESOR: Exactamente. Ahora analice la expansión isobárica de un gas desde el punto de vista energético.

ESTUDIANTE B: El gas se expande. Esto es, realiza trabajo. Debido a esto, como se puede apreciar de (106), la temperatura del gas aumenta, es decir, aumenta su energía interna. Por consiguiente, en este caso, hay que transmitirle al gas una cantidad de calor relativamente grande: una parte de este calor se gasta en aumentar la energía interna del gas, otra parte se convierte en el trabajo realizado por el gas.

PROFESOR: Correcto. Trataremos un ejemplo más. Un gas es calentado y debido a esto su temperatura aumenta en ΔT. Se hace esto dos veces: una vez manteniendo constante el volumen del gas y la otra, a presión constante. ¿Son iguales en los dos casos las cantidades de calor que hay que suministrarle al gas para calentarlo?

ESTUDIANTE A: Creo que son iguales.

ESTUDIANTE B: Yo, por el contrario, creo que diferentes. Cuando el volumen permanece constante no se realiza trabajo y todo el calor se invierte en aumentar la energía interna del gas, es decir, en aumentar su temperatura. En este caso

$$Q_1 = C_1 \Delta T \qquad (114)$$

A presión constante el calentamiento del gas inevitablemente está relacionado con su expansión, y en tal caso se realiza un trabajo $A = p(V — V_1)$. Una parte del calor comunicada Q_1 se gasta en aumentar la energía interna del gas (en aumentar la temperatura) y la otra parte en el trabajo realizado por el gas e, indicado arriba, o sea,

$$Q_2 = C_1 \Delta T + p(V — V_1) \qquad (115)$$

Se ve fácilmente que $Q_1 < Q_2$

PROFESOR: Estoy de acuerdo con el estudiante B. ¿Cómo se denomina la cantidad de calor que hay que transferirle a un cuerpo para elevar su temperatura en un grado?

ESTUDIANTE B: Se denomina capacidad calorífica (o calor específico) del cuerpo dado.

PROFESOR: ¿Qué conclusión con relación a la capacidad calorífica de un gas se puede hacer en base al ejemplo considerado?

ESTUDIANTE B: Un gas tiene dos calores específicas diferentes: a volumen constante y a presión constante, siendo menor el calor especifico a volumen constante (es decir, el coeficiente C_1 de las últimas expresiones) que el calor específico a presión constante.

PROFESOR: ¿Podría usted expresar el calor específico a presión constante por medio del calor específico a volumen constante, es decir, por medio de C_1?

ESTUDIANTE B: Trataré de hacerlo. Llamemos C_2 al calor específico a presión constante. De acuerdo con la definición de calor específico escribimos $C_2 = Q_2/\Delta T$. Colocando en esta última expresión el valor de Q_2 de la fórmula (115) obtenemos:

$$C_2 = C_1 + p(V - V_1)\Delta T \qquad (116)$$

PROFESOR: Usted no llegó a la fórmula final. Si utilizamos la ecuación general de los gases, se puede escribir

$$p(V - V_1) = (m/\mu)R(T - T_1) = (m/\mu)R\Delta T$$

Colocando este resultado en (116), finalmente obtenemos

$$C_2 = C_1 + (m/\mu)R \qquad (117)$$

Si nos referimos a una molécula-gramo de un gas ($m = \mu$) esta relación para los calores específicos resulta una expresión mucho más simple:

$$C_2 = C_1 + R \qquad (118)$$

Para terminar este parágrafo analicemos cierto ciclo, compuesto de una isoterma, una isocora y una isobara (ver figura 79 a, en donde se toman como ejes de coordenadas a los ejes p, V), Se pide dibujar (cualitativamente) este ciclo en los ejes V, T y analizar el carácter del intercambio de la energía del gas con el medio exterior en cada tramo del ciclo.

ESTUDIANTE B: En el plano V, T el ciclo dado tiene la forma que se indica en la figura 79 a.

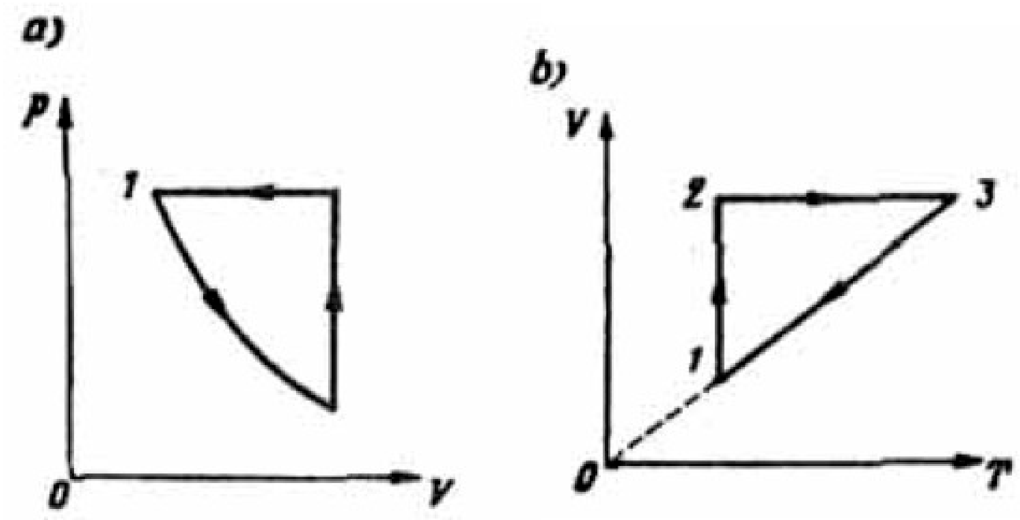


Figura 79.

PROFESOR: Correcto. Analice el carácter del intercambio de la energía del gas con el medio exterior en las diferentes secciones.

ESTUDIANTE B: En la sección 1-2 el gas se expande isotérmicamente y recibe del medio exterior cierta cantidad de calor e invierte toda esta energía en trabajo. La energía interna del gas no varía. En la sección 2-3 el gas experimenta un calentamiento isocoro. Como el volumen del gas no varía, en este caso no se realiza ningún trabajo. La energía interna del gas aumenta gracias únicamente al calor que se le suministra desde afuera. En el tramo 3-1 el gas se comprime isobáricamente, en este caso su temperatura baja, lo cual se aprecia muy bien en la figura 79 b. Aquí se realiza trabajo sobre el gas, sin embargo, su energía interna disminuye. Esto significa que el gas suministra calor al medio exterior en forma bastante intensiva.

PROFESOR: Su razonamiento es absolutamente correcto.

ESTUDIANTE A: Esta discusión me demostró que prácticamente no sabía las leyes de los gases. ¿Es realmente necesario tener todos estos conocimientos para el examen de admisión? Yo creo que algunas de las preguntas que acabamos de tratar se salen de los marcos del programa de física para quienes ingresan a las universidades e institutos de enseñanza superior.

PROFESOR: Si usted analiza atentamente la discusión anterior. encontrará que en ella solamente hemos tratado aquellas preguntas que están directamente relacionadas con la ecuación de estado de un gas ideal en forma general o en casos particulares especiales. La causa de su confusión no se debe a que las preguntas formuladas estén fuera del programa de física, sino al hecho de que usted no preparó debidamente el material dedicado a las leyes de los gases. Desafortunadamente la mayoría de los estudiantes, que se presentan a los exámenes de admisión, se limitan a tener un conocimiento superficial sobre las leyes de los gases.

§21. ¿COMO RESUELVE USTED LOS PROBLEMAS SOBRE LAS LEYES DE LOS GASES?

ESTUDIANTE A: Quisiera discernir un poco sobre la aplicación de las leyes de los gases en la solución de diferentes tipos de problemas.

PROFESOR: Casi todos los problemas sobre las leyes de los gases, propuestos a los examinandos son, en mi opinión, bastante fáciles. La mayoría de éstos pertenecen a uno de los siguientes grupos.

Primer grupo: Los problemas se elaboran en base al cambio de estado de cierta masa de gas, para lo cual no se utiliza el valor de dicha masa. Como resultado de la expansión, calentamiento u otros procesos el gas pasa de cierto estado p_1, V_1, T_1 al estado p_2, V_2, T_2. Los parámetros de los estados inicial y final están relacionados entre sí por la ecuación de estado del gas

$$p_1 \cdot V_1/T_1 = p_2 \cdot V_2/T_2 \qquad (119)$$

En el problema se pide encontrar uno de estos seis parámetros. Segundo grupo: El estado del gas no varía, pero en cambio en el problema se tiene en cuenta la masa del gas. Se pide encontrar b bien dicha masa, conociendo los parámetros del estado del gas, o bien determinar uno de los parámetros del estado, cuando se conoce la masa del gas y los otros parámetros. En esta clase de problemas debemos conocer el peso molecular del gas considerado.

ESTUDIANTE B: Para resolver problemas del segundo grupo lo más cómodo es utilizar la ecuación de estado de les gases (104).

PROFESOR: Se sobreentiende que esta ecuación se puede utilizar. Sin embargo, para esto usted necesita saber el valor numérico de la constante universal de los gases R. Como regla general nadie la recuerda y por esto resulta más práctico utilizar el siguiente procedimiento: imaginariamente llevamos el gas a las condiciones normales y llamemos p_n, V_n T_n a los parámetros del gas en estas condiciones; utilicemos luego la relación

$$pV/T = p_nV_n/T_n \qquad (120)$$

donde

$$V_n = (m/\mu)\ 22{,}4\ l$$

ESTUDIANTE B: No creo que este procedimiento sea más fácil que utilizar la ecuación (104), puesto que en tal caso hay que recordar tres magnitudes: p_n = 76 cm Hg, T_n = 273 °K y $V_n(m/\mu)$ = 22,4 l. Pienso que es más fácil recordar el valor de una sola magnitud, o sea, la constante universal de los gases R.

PROFESOR: Y de todas maneras el método que he propuesto es más simple ya que los valores de las tres magnitudes indicadas por usted (la presión, la temperatura y el volumen de un mol de gas a condiciones normales) todos los recuerdan bien. Supongamos que se pide encontrar el volumen que ocupan 58 g de aire a una presión de 8 at y a una temperatura de 91 °C. La solución de este problema la vamos a encontrar utilizando el método que he propuesto. Puesto que la masa de una molécula-gramo de aire es igual a 29 g, por lo tanto, tenemos 2 moles (o moléculas-gramo). En condiciones normales los dos moles ocupan un volumen igual a 44,8 l. A partir de (120) encontramos

$$V = V_n \frac{p_n T}{p T_n} 44{,}8\ (l) \frac{l \cdot 364}{8 \cdot 273} = 7{,}51$$

ESTUDIANTE B: Veo que usted coloca p_n = 1 at. Sin embargo, en las condiciones del problema seguramente se refieren a atmósferas técnicas. Al utilizar atmósferas técnicas, hay que colocar p_n =1,034 at.

PROFESOR: Es cierto. Entre una atmósfera física (la que corresponde a la presión normal) y una atmósfera técnica existe diferencia. En el caso dado he despreciado esta diferencia.

ESTUDIANTE A: ¿No podría usted indicar las dificultades más características con las cuales hay que tropezar al resolver problemas tanto del primero como del segundo grupo?

PROFESOR: Yo ya he dicho que mi opinión es que estos problemas son bastante fáciles.

ESTUDIANTE A: Pero, ¿en qué se equivocan frecuentemente los examinandos?

PROFESOR: Si no tomamos en cuenta la corriente falta de atención, la causa principal de error es acaso el no saber calcular la presión de un gas en uno u otro estado concreto. Veamos el ejemplo de un tubito que tiene cerrado uno de sus extremos. Dentro del tubo se tiene una columna de mercurio que separa del medio exterior al volumen de aire que está dentro del tubo. El tubo puede girar en un plano vertical. En la primera posición (figura 80 a) la columna de aire dentro del tubo tiene una longitud igual a l_1 mientras que en la segunda posición (figura 80, b) dicha columna tiene una longitud igual a l_2.

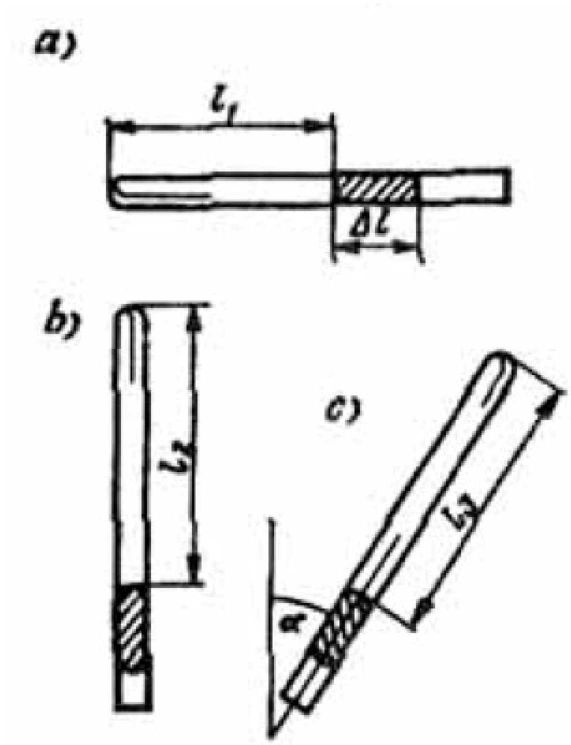


Figura 80.

Se pide encontrar la longitud l_3 de la columna de aire en la tercera posición, cuando el tubo está inclinado formando un ángulo α con la vertical (Figura 80 c).

Llamemos p_A a la presión atmosférica en unidades de longitud de la columna de mercurio; Δl, a la longitud de la columna de mercurio dentro del tubo. En la primera posición la presión del aire dentro del tubo es igual, evidentemente, a la presión atmosférica p_A. En la segunda posición la presión del aire dentro del tubo es igual a la diferencia (p_A — Δl), puesto que la presión atmosférica en este caso es equilibrada por la suma de las presiones de la columna de mercurio y la del aire dentro del tubo. Utilizando la ley de Boyle—Mariotte, escribimos

$$l_1 p_A = l_2 (p_A - \Delta l)$$

De aquí encontramos, que la presión atmosférica es igual a

$$p_A = \Delta l \cdot l_2 / (l_2 - l_1) \qquad (121)$$

En la tercera posición una parte del peso de la columna de mercurio se equilibra con la reacción de las paredes del tubo. Como resultado de esto, la presión del aire dentro del tubo resulta igual a

$$(p_A — \Delta l \cos \alpha)$$

Utilizando la ley de Boyle — Mariotte para el primero y tercero estados del gas, escribimos

$$l_1 p_A = l_3(p_A — \Delta l \cos \alpha)$$

De aquí encontramos que la presión atmosférica es igual a

$$p_A = \Delta l \cdot l_3 \cos \alpha \; / (l_3 - l_1) \qquad (122)$$

Igualando los miembros de la derecha de las igualdades (121) y (122), obtenemos

$$l_2/(l_2 — l_1) = l_3 \cos \alpha \; (l_3 — l_1)$$

De esta última igualdad encontramos la longitud

$$l_3 — l_1 l_2/[l_2 — (l_2 — l_1) \cos \alpha] \qquad (123)$$

Se ve fácilmente que si $\cos \alpha = 1$, $l_3 = l_2$ decir, tendremos la segunda posición del tubo; si $\cos \alpha = 0$, entonces $l_3 = l_1$, es decir, el tubo tendrá la primera posición.

ESTUDIANTE A: Los grupos de problemas que usted ha indicado los entiendo, pero en el examen, seguramente, habrá problemas que constituyen una combinación de los problemas del primero y del segundo grupo.

PROFESOR: Sí, dicha variante no está excluida. Estudiemos el siguiente problema. 16 g de oxigeno a una presión de 2 at ocupan un volumen de 5 l. ¿Cómo cambió la temperatura del gas, si se sabe, que al aumentar la presión hasta 5 at su volumen disminuyó a 1 l?

ESTUDIANTE A: Sabiendo la masa de oxigeno, su presión y volumen, puedo encontrar inmediatamente su temperatura. 16 gramos de oxigeno es lo mismo que 0,5 moles, es decir, un volumen igual a 11,2 l en condiciones normales. Luego encuentro que

$$T_1 = T_n \frac{p_1 V_1}{p_n V_n} = 273 \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 11{,}2} - 244°K \qquad (124)$$

PROFESOR: Correcto. Hasta aquí el problema se ha resuelto como un problema típico del segundo grupo.

ESTUDIANTE A: Conocida la temperatura T_1 del estado inicial del gas, encuentro la temperatura T_2 del estado final

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 244 \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 5} = 488\,°K$$

Comparando este resultado con (124) encontramos que la temperatura del gas aumentó en 244°.

PROFESOR: Todo está correctamente hecho. Como usted ve, la segunda parte del problema se resuelve como un problema típico del primer grupo.

ESTUDIANTE B: En un principio, al hablar de los posibles grupos de problemas, usted dijo que a éstos pertenece la mayoría de los problemas. ¿Existen algunos, que se diferencien en principio de los problemas del primero y del segundo grupo?

PROFESOR: Si, existen. En los problemas de los grupos indicados atrás, la masa del gas se supone constante. No obstante, son posibles problemas en los cuales la masa del gas varía (cuando se expele o, por lo contrario. se bombea un gas).

Condicionalmente clasificaremos a estos problemas en un tercer grupo. La resolución de estos problemas no tiene un procedimiento determinado, ellos exigen un análisis especial. Sin embargo, en cada caso concreto un problema del tercer grupo se puede reducir a problemas del tipo de los dos primeros grupos o a una combinación de éstos. La dificultad consiste en hallar la manera de resolverlo. Al respecto, les propongo estudiar los dos problemas siguientes.

Primer problema. *Un recipiente contiene un gas a una presión de 20 at y a una temperatura de 27 °C. Encontrar la presión del gas dentro del recipiente, después que la mitad de la masa de dicho gas ha sido expulsada del recipiente y la temperatura elevada a 50 °C.*

Este problema es semejante a los problemas del primer grupo cuanto hay cambio del estado del gas. Sin embargo, al cambiar de estado varía en este caso también la masa del gas. Para utilizar la ecuación de estado de los gases, se necesita que el cambio de estado se realice para la misma cantidad de masa. Para este propósito consideremos a la cantidad de masa que finalmente se queda dentro del recipiente. Sean sus parámetros finales p_2, V_2, T_2: $T_2=(273 + 27 + 50)=350$ °K; $V_2 = V_1$. donde V es el volumen del recipiente; p_2 es la magnitud que buscamos. ¿Cómo expresar los parámetros iniciales de la masa de gas considerada?

ESTUDIANTE A: Esta masa tendrá la misma temperatura que todo el gas: (273 + 27) = 300 °K: su volumen V_1 es igual a la mitad del volumen del recipiente V/2; su presión es la misma que la de todo el gas: $p_1=20$ at.

ESTUDIANTE B: Yo tomarla los parámetros iniciales de la masa de gas considerada de manera diferente: $T_1=300$ °K; el volumen, el mismo que el de todo gas (V_1 = V). pero en cambio la presión es igual a la mitad de la presión de todo el gas: p_1 10 at.

PROFESOR: Por cuanto la presión y el volumen figuran en forma de producto, sus suposiciones, aunque diferentes, conducen a un mismo resultado. Por lo tanto, habría sido posible no prestar atención a esta diferencia, si su análisis no constituyera un determinado interés, desde el punto de vista de la física. Condicionalmente llamaremos «blancas» a las moléculas de la cantidad de gas que finalmente se queda dentro del recipiente, mientras que a las moléculas de la cantidad de gas expulsada del recipiente las llamaremos moléculas «negras». Así pues, las moléculas blancas se quedan dentro del recipiente, mientras que las negras se salen de éste. El estado inicial del gas permite dos interpretaciones:

1. las moléculas blancas y negras están separadas de tal modo que se puede escoger dentro del recipiente volúmenes macroscópicos, ocupados solamente por moléculas blancas o solamente por moléculas negras (figura 81 a);
2. las moléculas blancas y las negras están mezcladas de tal manera que en cualquier volumen macroscópico dentro del recipiente se tiene prácticamente el mismo número de moléculas de una y otra variedad (figura 81 b).

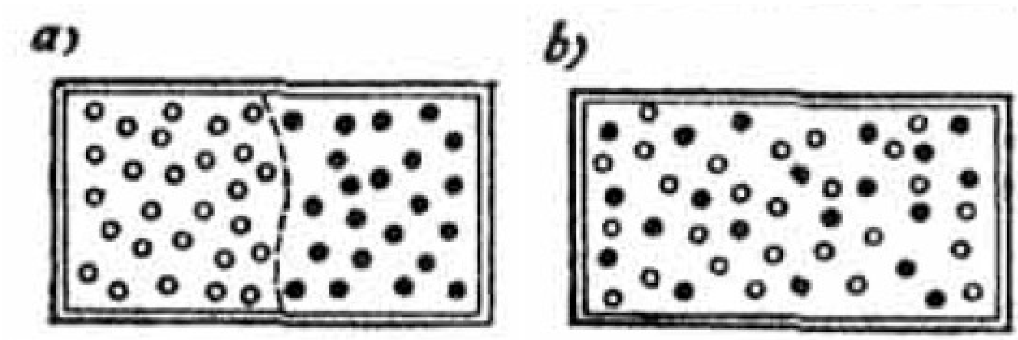


Figura 81.

En el primer caso, cada tipo de moléculas forma su propio «cuerpo» en estado gaseoso de volumen V/2, el cual hace presión sobre las paredes y sobre la frontera imaginaria con el segundo «cuerpo» con una presión de 20 at. En el segundo caso las moléculas de cada tipo resultan distribuidas por todo el volumen V del recipiente, en este caso las moléculas de cada tipo aportan la mitad de la presión sobre las paredes (la mitad del número de choques total contra las paredes del recipiente son debidos a las moléculas blancas y la otra mitad, a las moléculas negras).

En este caso $V_1 = V$, $p_1 = 10$ at. En relación con la última observación recordemos la ley de las presiones parciales: la presión de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones de las componentes de la mezcla. El caso que consideramos se trata precisamente de una mezcla de gases: moléculas de dos tipos mezcladas entre sí.

ESTUDIANTE B: El segundo enfoque es más correcto, puesto que las moléculas de ambos tipos realmente se mezclan.

PROFESOR: En el problema considerado los dos enfoques son totalmente equivalentes. No olviden que la división a priori que hacemos de las moléculas es convencional.

Volviendo a la solución del problema, escribimos la ecuación de estado de los gases para la masa de gas que queda dentro del recipiente:

$$10V/300 = p_2V \cdot 350.$$

De aquí hallamos que

$$p_2 = 11{,}7 \text{ at.}$$

Pasemos al segundo problema. *Un gas se encuentra dentro de un recipiente de volumen V a una presión p. El gas es bombeado del recipiente con ayuda de una bomba de émbolo cuya cámara tiene un volumen v (figura 82). Se pide encontrar el número de recorridos a que realiza el émbolo, para que la presión del gas en el recipiente disminuya hasta el valor p_n.*

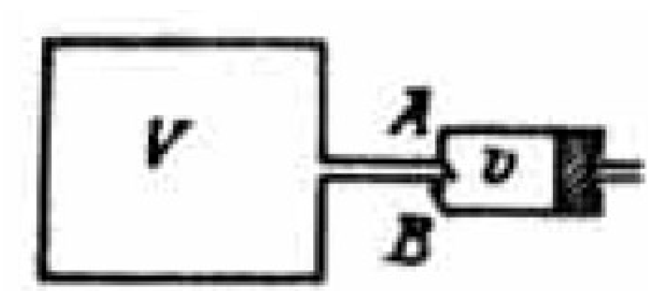


Figura 82.

ESTUDIANTE A: Me parece que este problema no presenta mayor dificultad: n recorridos del émbolo conducen a n aumentos del volumen del gas en un valor v. Por lo tanto, escribimos la ecuación de Boyle — Mariotte en forma

$$p_0V = p_n(V + nv)$$

De aquí hallamos el número de recorridos n.

PROFESOR: ¿A qué masa de gas se refiere la ecuación que usted escribió?

ESTUDIANTE A: A la masa que había en el recipiente.

PROFESOR: Pero si después del primer recorrido una parte de esta masa sale del sistema: cuando el émbolo empieza el movimiento de derecha a izquierda, éste cierra la válvula A y abre la válvula B. por la cual el gas sale del sistema (ver figura 82). Dicho en otras palabras, el n-ésimo aumento indicado por usted del volumen del gas en un valor v no se refiere a la misma masa. Por esto, la relación que usted escribe no es correcta. Analizaremos cada uno de los recorridos del émbolo por separado. Empecemos desde el primer recorrido. Para la masa de gas, que al principio se encuentra dentro del recipiente, se puede escribir

$$p_0V = p_1(V + v)$$

donde p_1 es la presión del gas después de que el émbolo, al terminar un recorrido completo, se encuentra en el extremo derecho. Luego el émbolo regresa a su posición inicial en el extremo izquierdo. En este momento, como ya se dijo, la válvula A se cierra y dentro del recipiente queda una masa de gas, menor en comparación con la masa inicial. Su presión es p_1. Para esta masa de gas se puede escribir la ecuación

$$p_1V = p_2(V + v)$$

donde p_2 es la presión del gas después de terminada el segundo recorrido completo del émbolo. Analizando sucesivamente el tercero, cuarto y siguientes recorridos del émbolo, obtenemos sistema de n ecuaciones de la ley de Boyle Mariotte:

$$\left.\begin{array}{c} p_0V = p_1(V+v) \\ p_1V = p_2(V+v) \\ p_2V = p_3(V+v) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ p_{n-1}V = p_n(V+v) \end{array}\right\} \qquad (125)$$

Cada una de estas ecuaciones se refiere a una determinada masa de gas. Resolviendo el sistema (125), obtenemos

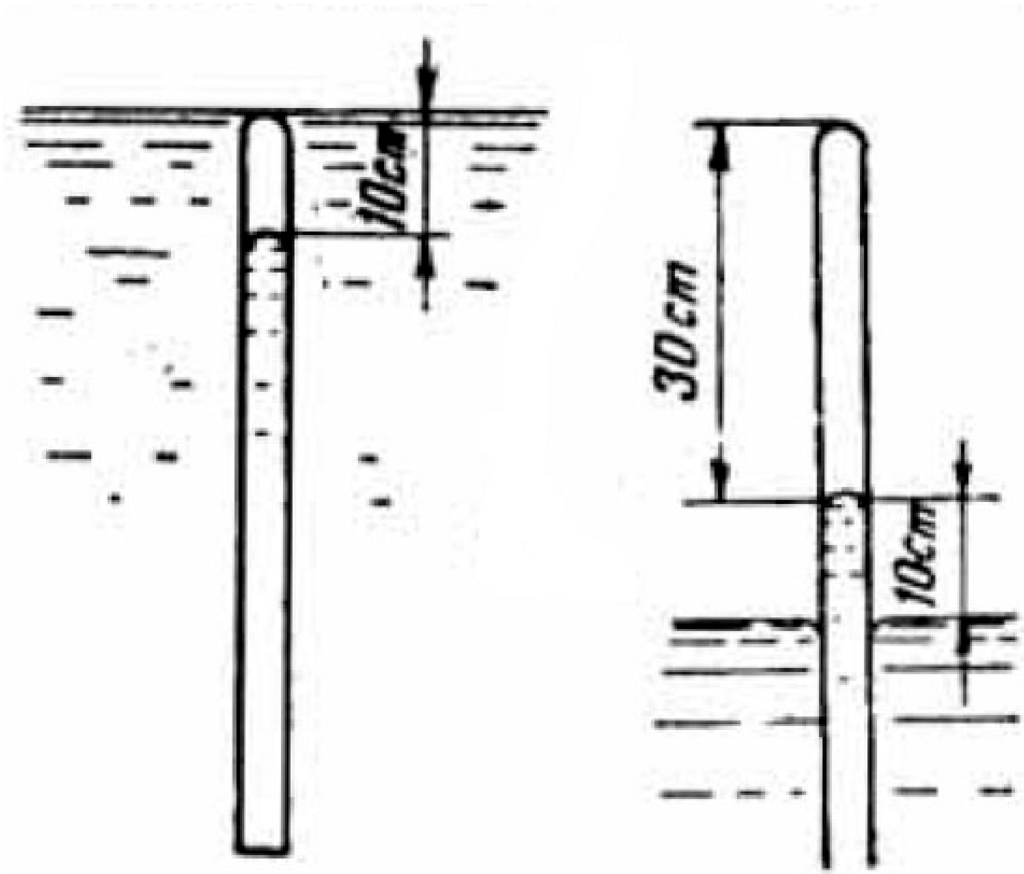
$$p_n = p_0 \left[\frac{V}{(V+v)}\right]^n$$

Logaritmizando este resultado, encontramos

$$n = \frac{\ln \frac{p_n}{p_0}}{\ln \frac{V}{V+v}} \qquad (126)$$

PROBLEMAS

39. Un tubo con un extremo superior cerrado es sumergido completamente en un recipiente que contiene mercurio (figura 83), después de lo cual, dentro del tubo queda una columna de aire de 10 cm de longitud. ¿A qué altura sobre el nivel del mercurio en el recipiente hay que levantar el extremo superior del tubo para que dentro de éste el nivel del mercurio quede igual al nivel del mercurio en el recipiente? La presión atmosférica es la normal. Calcular la masa de aire dentro del tubo, si su sección es igual a 1 cm^2 y la temperatura igual a 27 °C.



Figuras 83 y 84

40. Un tubo con uno de sus extremos cerrado se deja caer por el extremo abierto en un recipiente que contiene mercurio (figura 84). ¿Cómo varía el nivel en el tubo, si la temperatura se eleva de 27° a 77 °C? Se desprecia la expansión térmica del tubo. La presión atmosférica es igual a la normal. Encontrar la masa de aire, encerrada dentro del tubo, si su sección es igual a 0,5 cm^2.

41. Un recipiente cuyo volumen es igual a 5 l, contiene aire a 27 °C de temperatura y a una presión de 20 at. ¿Qué masa de aire hay que liberar del recipiente, para que la presión de éste caiga a 10 at?

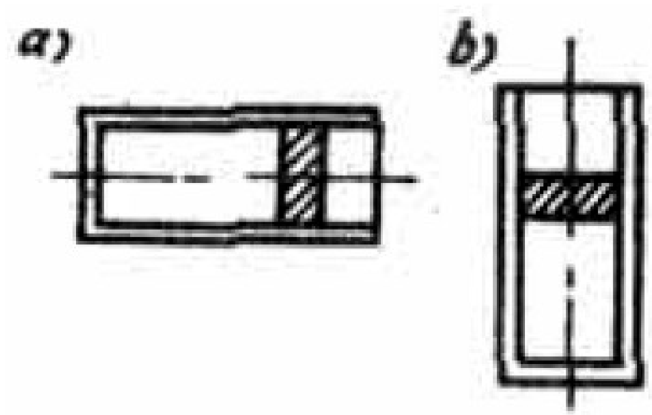


Figura 85.

42. Calcular el trabajo que realiza un gas cuando se calienta isobáricamente desde 20 °C hasta 100 °C, si se encuentra dentro de un recipiente cerrado por medio de un émbolo movible, cuya sección es igual a 20 cm^2 y su peso 5 kgf. Analizar dos casos:

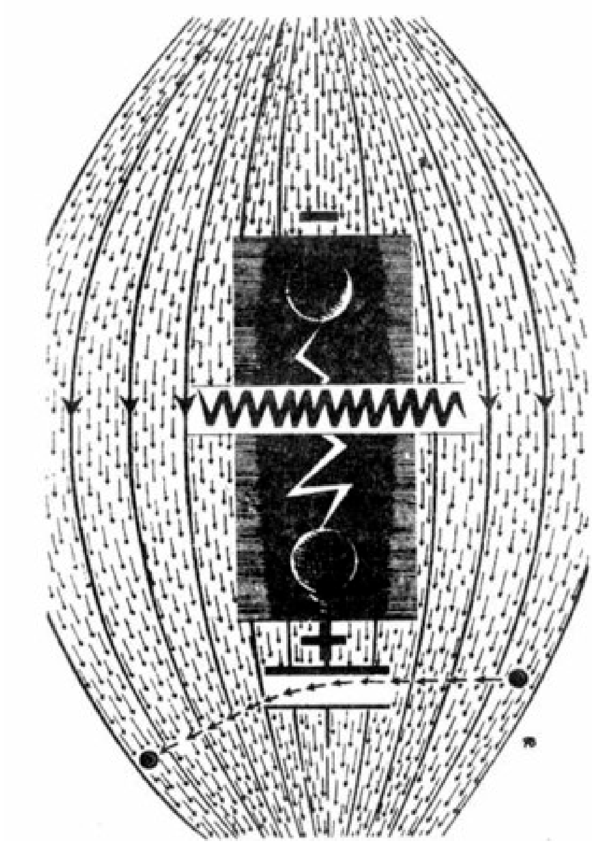
1. cuando el recipiente se encuentra en posición horizontal (figura 85, a), y
2. cuando el recipiente se encuentra en posición vertical (figura 85, b).

El volumen inicial del gas es igual a 5 l, y la presión atmosférica es la normal.

43. En un tubo de sección igual a 0,5 cm^2, orientado verticalmente y con su extremo cerrado hacia arriba, se encuentra una columna de aire de 40 cm de longitud, tapada por debajo por una columna de mercurio de 8 cm de longitud; la temperatura es igual a 27 °C. ¿Cómo varía la longitud de la columna de aire, si inclinamos el tubo un ángulo de 60° con relación a la vertical y al mismo tiempo elevamos la temperatura en 30 °C. La presión atmosférica es la normal. Encontrar la masa de aire, encerrada dentro del tubo.

44. ¿Cuál es la masa de los vapores de agua en una habitación de 6 m x 5 m x 3,5 m, si a una temperatura de 15 °C la humedad relativa es del 55%? ¿Caería rocío, si la temperatura del aire baja hasta los 10 °C? ¿Qué parte de la masa total del aire de la habitación constituye la masa de los vapores de agua, si la presión del aire es igual a 75 cm Hg?

Capítulo 10



¿Qué es el campo eléctrico? ¿Cómo se describe? ¿Cómo se lleva a cabo el movimiento en un campo? Estos conceptos fundamentales de la Física se analizan fácilmente con el ejemplo del campo electrostático. Discutamos el movimiento de un cuerpo cargado en un campo electrostático homogéneo. Resolveremos una serie de problemas, que nos ilustran la ley de Coulomb.

§ 22. HABLEMOS DEL CAMPO

PROFESOR: Conversemos acerca del campo, el cual constituye uno de los conceptos físicos fundamentales. Para ser más concretos hablaremos del campo electrostático. ¿Cómo se imagina usted el campo electrostático? ¿Qué es el campo en sí?

ESTUDIANTE A: Debo confesar que para mí es muy difícil imaginarme el campo. El campo eléctrico es algo imperceptible, invisible, algo así como un «fantasma», mientras que, según afirman, está presente en todas partes. Yo no estoy en contra cuando me dicen que el campo es materia, pero para mí esto es como una palabra sin sentido. Cuando hablan de la sustancia, yo entiendo de qué se trata; pero cuando hablan del campo, no entiendo.

ESTUDIANTE B: Para mí el campo es totalmente perceptible. En las sustancias la materia se encuentra, digámoslo así, en forma concentrada; en el campo, por el contrario, la materia está como «esparcida» en el espacio. El hecho de que nosotros no veamos el campo con nuestros ojos, no demuestra nada: el campo lo podemos «ver» perfectamente con ayuda de instrumentos relativamente sencillos. El campo desempeña el papel de transmisor de las interacciones entre cuerpos. Por ejemplo, el campo electrostático es el transmisor de las interacciones entre cargas eléctricas inmóviles. Podemos considerar que cada carga «crea» un campo a su alrededor. El campo creado por una carga, influye sobre la otra, y viceversa, el campo creado por la segunda carga, influye sobre la primera. Así se lleva a cabo la interacción de Coulomb entre cargas eléctricas.

ESTUDIANTE A: Pero, ¿no es posible evitar los «intermediarios»? ¿Qué nos impide suponer que una carga influye sobre otra en forma directa?

ESTUDIANTE B: Por el contrario esto puede dar lugar a serias objeciones. Imagínese usted que una de las cargas de pronto, por alguna causa y en cierto instante, empiece a moverse, «a temblar». Si partimos de la suposición de que existe una «interacción directa», debemos concluir que la segunda carga en el mismo instante que la primera, empezará también a «temblar». Esto significaría que la señal de la primera carga llegó instantáneamente hasta la segunda, lo cual, como es bien sabido, contradice a los conceptos fundamentales de la teoría de la relatividad. Si hay un transmisor de la interacción, es decir, un campo, en tal caso la señal se propaga de una carga a otra a través de dicho campo. Por alta que sea la velocidad de propagación, de todas maneras es finita y por lo tanto puede existir un intervalo de tiempo, cuando la primera carga ya ha terminado de «temblar», mientras que la segunda no ha empezado. En el transcurso de este intervalo de tiempo solamente el campo contiene la señal.

ESTUDIANTE A: De todas maneras, quisiera oír una definición bien exacta de qué es el campo.

PROFESOR: Yo he oído con interés su discusión y me doy cuenta de que el estudiante B se ha interesado bastante por los problemas de la Física moderna y ha leído diferentes libros de Física de divulgación científica, razón por la cual se le ha formado lo que podríamos llamar una mentalidad emprendedora. El campo es para él, una noción completamente real y «útil». Sus observaciones acerca del campo como transmisor de interacciones son totalmente correctas. El estudiante A, según parece, se limitó a la lectura formal del texto de física; por esta razón, su razonamiento parece bastante pobre. Yo digo esto, por supuesto, no con el fin de ofender a mi interlocutor, sino para recalcar con este ejemplo que muchos de los examinandos dejan entrever su incapacidad en situaciones análogas a la anterior. Aunque parezca extraño, relativamente un buen número de estudiantes no manifiesta un vivo interés por las lecturas de divulgación científica. Sin embargo, regresemos a la esencia del problema planteado. (Dirigiéndose al estudiante A.) Usted exige que se le dé una definición exacta del campo. Sin dicha definición usted no puede imaginarse el campo. No obstante, usted ha dicho, que puede imaginarse la sustancia. ¿Pero, acaso usted conoce una definición precisa de la noción de sustancia?

ESTUDIANTE A: La noción de sustancia no necesita ser definida. Toda sustancia se puede «tocar con la mano».

PROFESOR: En ese caso la noción de campo «no necesita de definición» puesto que el campo también se puede «tocar», aunque no con la mano. Sin embargo, en cuanto a la definición, la cuestión es mucho más seria. Dar una definición precisa, lógica e irreprochable, significa expresar la noción analizada a través de conceptos «primarios». ¿Qué hacer si la misma noción es un concepto «primario»? Trate usted de dar en geometría la definición de línea recta. Aquí, más o menos, tenemos el mismo caso que el de las nociones de la «sustancia» y del «campo». Estas son nociones tan primarias, tan fundamentales, que es poco probable hallar una definición exacta que refleje toda su esencia.

ESTUDIANTE A: Sin embargo, ¿se podría tratar de encontrar una cierta definición, aunque no fuese demasiado clara?

PROFESOR: Si, por supuesto. Sólo que entonces hay que tener en cuenta que una definición de esta índole de ninguna manera es completa. La materia puede existir de diferentes formas. Esta puede estar concentrada en los límites del dominio orgánico del espacio con una frontera más o menos determinada (o como a veces dicen «localizada», pero también, puede suceder lo contrario, es decir, puede resultar «no localizada». El primer estado de la materia se puede identificar con el concepto de «sustancia» y el segundo estado, con el concepto de «campo». Tanto en un estado como en el otro, además de sus características específicas, poseen características físicas comunes. Por ejemplo, existe la energía de la unidad de volumen de una sustancia y también existe la energía de la unidad de volumen del campo. Se puede hablar de la cantidad de movimiento de la unidad de volumen de una sustancia y de la cantidad de movimiento de la unidad de volumen del campo. Todo campo juega el papel de conductor de un tipo determinado de interacción: precisamente según esta interacción se manifiestan las características del campo en uno u otro de sus puntos. Por ejemplo, un cuerpo cargado eléctricamente crea a su alrededor un campo electrostático. Para palpar y medir dicho campo en uno u otro punto del espacio, es necesario introducir en ese punto otro cuerpo cargado y medir la fuerza, que actúa sobre este último. Para esto se supone que el segundo cuerpo es suficientemente pequeño, de tal manera que la distorsión que su presencia causa del campo que se mide, sea despreciable.

Las propiedades de la materia son inagotables, el proceso de su conocimiento es infinito. El hombre constantemente avanza más y más en su conocimiento de la materia y en la utilización práctica de las propiedades de la materia que lo rodea. Al avanzar, el hombre se ve obligado de tiempo en tiempo a «poner señales» que vienen a ser como jalones en el camino del conocimiento. Pues bien, nosotros a algo le hemos llamado «campo». Entendemos que este «algo» es ilimitado. Sabemos mucho de aquello que hemos denominada «campo» y por esta razón utilizamos en forma satisfactoria el concepto que hemos introducido. Sabemos bastante, pero de todas maneras, estamos lejos de saberlo todo. Tratar de dar a ese «algo» una definición precisa, es lo mismo que tratar de medir la profundidad de un abismo sin fondo.

ESTUDIANTE B: Yo creo que el concepto de campo, como en general cualquier otro concepto que aparece mientras se estudia el mundo material, es inagotable.

Precisamente por esto es imposible dar una definición precisa y a la vez completa del campo.

PROFESOR: Estoy completamente de acuerdo con usted.

ESTUDIANTE A: Me siento completamente satisfecho con las observaciones que usted ha hecho acerca de la sustancia y del campo, analizados como dos estados de la materia, uno localizado y otro no localizado. Luego, usted habló sobre la notabilidad de los conceptos físicos y sobre la infinidad del proceso del conocimiento. Pues bien, cuando yo oí esto último, de nuevo toda claridad desapareció y me confundí nuevamente.

PROFESOR: Su psicología me es conocida. Usted no busca una definición del campo absolutamente precisa sino más o menos comprensible. Usted está listo a aprenderse concienzudamente esta definición para expresarla luego, tan pronta se lo exijan. Usted no se quiere convencer de que la situación no es, de ninguna manera, estática sino dinámica. No hay que pensar que todo se hace confuso; yo diría que todo se hace más dinámico: Toda definición exacta se considera completamente terminada. Sin embargo, los conceptos físicos se deben analizar precisamente en su desarrollo. Todo lo que ayer entendíamos como concepto de campo, se diferencia considerablemente de lo que entendemos por este concepto hoy. Así, por ejemplo, la física moderna al contrario que la física clásica, no traza una frontera rigurosa entre campo y sustancia. En la física moderna el campo y la sustancia se transforman mutuamente: la sustancia se convierte en campo y el campo, en sustancia. No obstante, hablar más detalladamente sobre este asunto significaría irnos demasiado adelante.

ESTUDIANTE B: Nuestra discusión sobre Física tomó un carácter completamente filosófico.

PROFESOR: Esto es completamente natural, porque el razonar sobre los conceptos físicos supone la existencia de una mentalidad lo suficientemente desarrollada dialécticamente. Si no está formada esa mentalidad, debemos por fuerza darle cabida al carácter filosófico. Por esto, precisamente, le aconsejo consultar con más frecuencia libros de toda clase. De esta manera usted educará su pensamiento, haciéndolo más elástico, más dinámico y, yo diría, menos burocrático. En relación con esto, el libro de V. I. Lenin «Materialismo y empiriocriticismo» puede constituir una gran ayuda para cualquier joven. Le recomiendo que lo lea.

ESTUDIANTE A: Pero este libro es demasiado complicado y se estudia en los institutos de enseñanza superior.

PROFESOR: Yo no insisto en que usted estudie este libro, puesto que en realidad no constituye una lectura fácil. Simplemente usted debe tratar de leerlo atentamente. De acuerdo con el desarrollo de su mentalidad, este libro puede influir poco o mucho en usted. De todas maneras le será útil.

Para terminar, yo quisiera decir lo siguiente: al estudiante A le asusta la «vaguedad», él exige precisión. El supone que cuanto más precisión haya tanto mejor, mas, él olvida que inclusive la precisión es buena hasta cierta medida. Trate de imaginarse un universo bien claro, con sus límites completamente bien trazados y definidos, acerca del cual usted tiene una información completa. Imagínese esto y dígame: ¿Acaso no le sorprenderla un universo primitivo e incapaz de desarrollarse? Piense en todo esto y no se apresure a sacar conclusiones. Y ahora, trataremos de analizar el problema desde otro punto de vista. Formulemos la siguiente pregunta: ¿cómo se describe el campo? Yo sé que muchos después de oír la respuesta, dirán: «Ahora sabemos qué es el campo eléctrico».

§ 23. ¿CÓMO SE DESCRIBE EL CAMPO ELECTROSTÁTICO?

PROFESOR: Continuemos la charla que iniciamos en el parágrafo anterior. Plantearemos la siguiente pregunta: ¿cómo se describe el campo electrostático?

ESTUDIANTE B: Para la descripción del campo electrostático se utiliza la característica vectorial de su fuerza, que recibe el nombre de intensidad del campo eléctrico. En cada punto del campo, la intensidad E tiene una dirección definida y su valor numérico correspondiente. Al desplazarse de un punto a otro del campo en tal forma que las direcciones de los vectores que representan la intensidad del campo sean siempre las tangentes a la dirección del recorrido, las trayectorias, que así obtenemos, reciben el nombre de «líneas de fuerza» del campo. Las líneas de fuerza son una manera muy cómoda de representar al campo electrostático en forma gráfica.

PROFESOR: Está bien. Ahora hagamos un análisis más concreto. La ley de Coulomb que determina la fuerza con la cual interaccionan dos cargas q_1 y q_2 situadas a una distancia r entre sí, la escribiremos de la siguiente manera

$$F_e = q_1 \cdot q_2 / r^2 \qquad (127)$$

Podemos descomponer esta fórmula en dos

$$E(r) = q_1 / r^2 \qquad (128)$$

$$F_e = E(r) \cdot q_2 \qquad (129)$$

La fórmula (128) establece que la carga q_1 crea alrededor de sí misma un campo cuya intensidad a una distancia r de la carga tiene el valor q_1/r^2. La fórmula (129) establece, que dicho campo actúa sobre la carga q_2, colocada en un punto situado a la distancia r de la carga q_1 con una fuerza igual al producto $E(r)q_2$. La descomposición de la fórmula (127) en dos se hace introduciendo un «intermediaria», o sea, con ayuda de la magnitud E, que es una característica del campo. Traten de determinar el campo de aplicación de las relaciones (127) - (129).

ESTUDIANTE B: La fórmula (127) se utiliza para dos cargas puntuales, de tal manera que éste debe ser el campo de aplicación de las Fórmulas (128) y (129), puesto que éstas se obtuvieron a partir de (127).

PROFESOR: No es exactamente así. A diferencia de las fórmulas (127) y (128), la fórmula (129) tiene una aplicación mucho mas amplia. Independientemente de cómo se ha creado el campo E (bien sea por una carga puntual o por un conjunto de cargas puntuales, o de cuerpos cargados de forma arbitraria), en todos los casos, la fuerza, con la cual el campo actúa sobre la carga q_0, será igual al producto de esta carga por la intensidad del campo en aquel punto, donde se encuentra la carga q_0. Una manera más general de escribir la fórmula (129), en forma vectorial, es la siguiente:

$$\overrightarrow{F_e} = \vec{E}(\vec{r})q_0 \qquad (130)$$

(aquí las flechas, como siempre, se utilizan para indicar los vectores). De la fórmula (130) se ve que, la dirección de la fuerza, que actúa sobre la carga q_0 en un punto dado del campo, coincide con la dirección y sentido del vector de la intensidad del campo en dicho punto, si la carga q_0 es positiva. Si la carga q_0, es negativa, la dirección de la fuerza tiene sentido contrario al del vector de la intensidad del campo.

Aquí se refleja la «independencia» del concepto del campo. Cuerpos diferentes cargados crean a su alrededor diferentes campos electrostáticos, sin embargo, cada uno de estos campos actúa sobre la carga que en él se introduce, de acuerdo a la misma ley (130). Para determinar la fuerza que actúa sobre la carga. es necesario calcular antes la intensidad del campo en el punto donde se encuentra esta carga. Por lo tanto es importante saber calcular la intensidad del campo de un sistema de cargas. Supongamos que se tienen dos cargas q_1 y q_2. La intensidad del campo debida a cada una de estas cargas se puede encontrar fácilmente (en valor, dirección y sentido) para cualquier punto del espacio que a usted le interesa. Supongamos que en cierto punto, cuya posición está dada por el vector $\vec{r}$, estas intensidades están representadas por los vectores $\overrightarrow{E_1}(\vec{r})$ y $\overrightarrow{E_2}(\vec{r})$. Para encontrar la intensidad resultante en el punto $\vec{r}$, usted debe sumar vectorialmente las intensidades de cada una de las cargas

$$\vec{E}(\vec{r}) = \overrightarrow{E_1}(\vec{r}) + \overrightarrow{E_2}(\vec{r}) \qquad (131)$$

Subrayo que a estas intensidades hay que sumarias vectorialmente. (Dirigiéndose al estudiante A.) ¿Usted comprende esto?

ESTUDIANTE A: Si. yo sé que las intensidades se suman vectorialmente.

PROFESOR: .Muy bien. Si es así, comprobemos cómo utiliza usted esto en la práctica. Dibuje las líneas de fuerza del campo creado por dos cargas de signos contrarios ($+q_1$ y $—q_2$) bajo la condición de que una de las cargas (por ejemplo q_1) es algo mayor que la otra.

ESTUDIANTE A: Para mí es difícil hacer esto. Nosotros no hemos analizado antes estos campos.

PROFESOR: ¿Qué campos estudiaron ustedes?

ESTUDIANTE A: Yo sé cómo representar las líneas de fuerza del campo creado por dos cargas puntuales de igual magnitud. He dibujado esta gráfica en la figura 86.

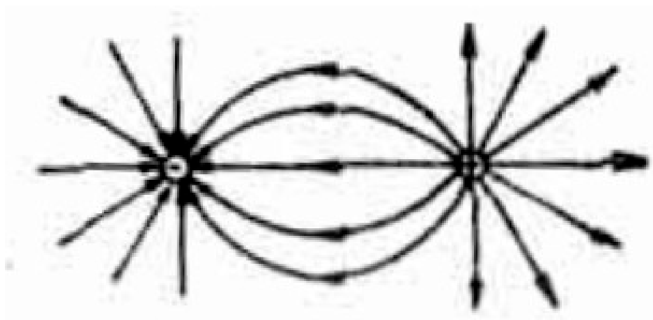


Figura 86.

PROFESOR: Su dibujo no es completamente preciso, aunque cualitativamente representa correctamente a las líneas de fuerza del campo creado por dos cargas de igual magnitud y de signos contrarios.

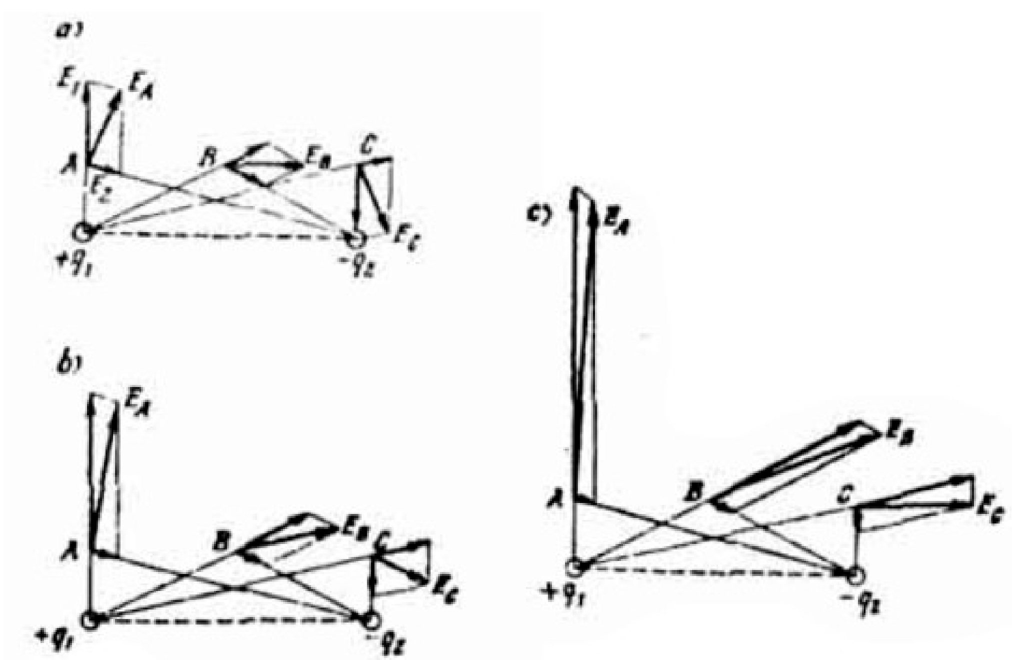


Figura 87

Pero, ¿por qué usted no puede imaginarse cómo cambiará esta gráfica a medida que aumenta una de las cargas?

ESTUDIANTE A: Nosotros nunca lo hicimos.

PROFESOR: Entonces, utilicemos las reglas para la suma vectorial de las intensidades. Empecemos con el caso que usted conoce, es decir, cuando las cargas son iguales (figura 87, a).

Escogemos tres puntos A, B, C, y construimos en cada uno de ellos el par de vectores de las intensidades del campo: $\overrightarrow{E_1}$ y $\overrightarrow{E_2}$ ($\overrightarrow{E_1}$ es el campo creado por la carga $+q_1$; $\overrightarrow{E_2}$, el campo creado por —q_2).

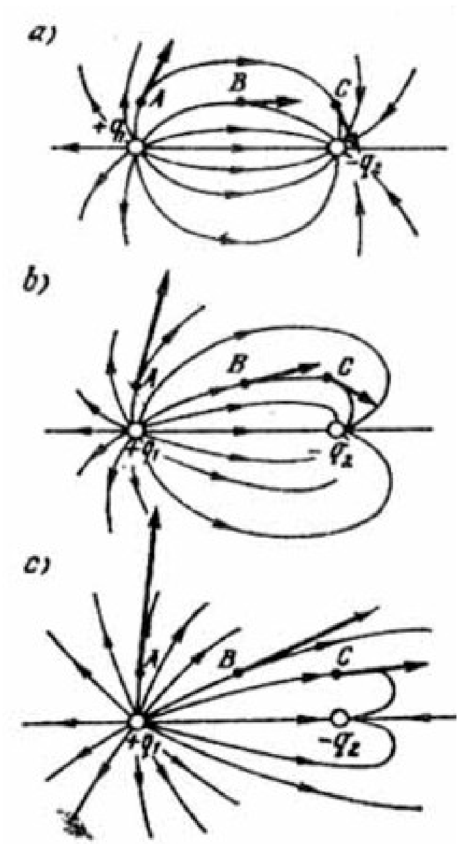


Figura 88

Luego hacernos la suma de los vectores $\overrightarrow{E_1}$ y $\overrightarrow{E_2}$, en cada uno de los puntos indicados obtenemos los vectores resultantes : $\overrightarrow{E_A}$, $\overrightarrow{E_B}$ y $\overrightarrow{E_c}$. Estos vectores deben ser tangentes a las líneas de fuerza del campo en los puntos correspondientes y además indican el comportamiento de las líneas de fuerza, representadas en la figura 88 a.

Compare este dibujo con el dibujo de la figura 86 que usted hizo. Observe atentamente las inexactitudes que usted cometió en cuanto al comportamiento de las líneas de fuerza a la izquierda de la carga —q y a la derecha de la carga +q.

Supongamos, que la carga +q, aumentó al doble, mientras que la carga —q, disminuyó en dos veces (figura 87, b). Escogemos los mismos puntos A, B. C, que en el caso anterior. Trazarnos en estos puntos, primero, los vectores de las intensidades de los campos y luego, sus sumas: $\overrightarrow{E_A}$, $\overrightarrow{E_B}$ y $\overrightarrow{E_c}$. La gráfica de las líneas de fuerza, que corresponde a estos vectores está representada en la figura 88 b. Finalmente supongamos que q_1 aumentó en dos veces más y q_2 disminuyó en dos veces (figura 87 b). Construimos para los puntos A, B y C las vectores : $\overrightarrow{E_A}$, $\overrightarrow{E_B}$ y $\overrightarrow{E_c}$. La gráfica de las líneas de fuerza está representada en la figura 88 c. Usted puede apreciar que al crecer el valor relativo de la carga $+q_1$ su influencia se hace más fuerte y el campo creado por ésta empieza a dominar completamente sobre el campo creado por la carga $—q_2$.

ESTUDIANTE A: Ahora entiendo cómo hay que construir la gráfica de las líneas de fuerza del campo creado por un sistema de cargas.

PROFESOR: Continuemos el estudio del campo electrostático. Este campo tiene una propiedad muy importante, que lo familiariza con el campo gravitatorios es la siguiente: el trabajo de las fuerzas del campo electrostático a lo largo de cualquier entorno cerrado es igual a cero. En otras palabras, si una carga, al desplazarse en un campo, regresa al punto de partida, el trabajo de las fuerzas del campo en dicho recorrido resulta igual a cero. En unos sectores del recorrido este trabajo será positivo, mientras que en otros sectores sera negativo, pero su suma, es decir, el trabajo neto, es igual a cero. De esta propiedad del campo electrostático se puede sacar conclusiones interesantes. ¿No podría usted indicarlas?

ESTUDIANTE B: No, no puedo imaginármelas.

PROFESOR: Yo le ayudaré. Usted seguramente ha observado que las líneas de fuerza del campo electrostático nunca se cierran. Estas empiezan y terminan en las cargas eléctricas (salen de las cargas positivas y terminan en las cargas negativas) o se dirigen al infinito (o vienen del infinito). ¿No podría usted relacionar este hecho con la propiedad del campo electrostático que hemos indicado arriba?

ESTUDIANTE B: Parece que he entendido. Si una línea de fuerza del campo electrostático se cerrara sobre sí misma, entonces, al desplazarnos a lo largo de ésta, podríamos regresar al punto de partida. Al mover una carga a lo largo de una línea de fuerza, el trabajo del campo no cambia de signo y, por lo tanto, será diferente de cero. Por otra parte, el trabajo a lo largo de cualquier trayectoria cerrada debe ser nulo. Es decir, las líneas de fuerza del campo electrostático no pueden cerrarse sobre sí mismas.

PROFESOR: Correcto. De la propiedad indicada se desprende una conclusión más: el trabajo realizado al mover una carga de un punto a otro no depende de la trayectoria seguida. Así pues, desplazaremos una carga desde el punto A hasta el punto B siguiendo dos caminos diferentes 1 y 2 (figura 89).

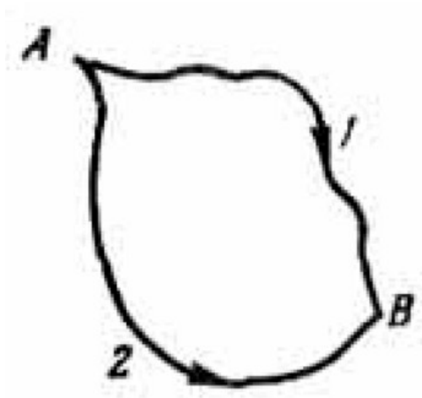


Figura 89.

Llamemos A_1 al trabajo de las fuerzas del campo al mover la carga a lo largo de la trayectoria 1 y A_2 al moverla a lo largo de la trayectoria 2. Hacemos luego un recorrido cerrado: del punto A pasamos al punto B a lo largo de la trayectoria 1, y del punto B hasta el punto A lo hacemos por la trayectoria 2. Al regresar a lo largo dei camino 2 se realizará un trabajo igual a $—A_2$. El trabajo total del campo en el recorrido cerrado es $A_1 + (—A_2) = A_1 — A_2$. Puesto que el trabajo a lo largo de cualquier entorno cerrado es igual a cero, obtenemos $A_1 = A_2$. El hecho de que el trabajo realizado al mover la carga no depende del camino seguido sino que se determina solamente a partir de las posiciones inicial y final del recorrido, permite utilizar esta magnitud como una característica del campo (ya que el trabajo depende solamente de los puntos que hemos escogido). Así pues, aparece una característica más del campo electrostático, el potencial. A diferencia de la intensidad, esta característica es una magnitud escalar, ya que se expresa a través del trabajo.

ESTUDIANTE B: A nosotros nos enseñaron que el potencial del campo no tiene sentido físico. Solamente tiene sentido físico la diferencia de los potenciales de dos puntos cualesquiera del campo.

PROFESOR: Es cierto. Hablando rigurosamente, los razonamientos anteriores permiten establecer precisamente la diferencia de potenciales: la diferencia de potenciales entre dos puntos A y C (llamémosla φ_A y φ_B) se define como la razón entre el trabajo de las fuerzas del campo al desplazar la carga q_0 desde el punto A hasta el punto C y la carga q_0, es decir,

$$\varphi_A — \varphi_B = A_A \cdot c/q_0 \qquad (132)$$

Sin embargo, si suponemos que en el infinito el campo no existe (es decir, $\varphi_\infty = 0$), la expresión (132) toma la forma

$$\varphi_A = A_A \rightarrow \infty/q_0 \qquad (133)$$

De esta manera, el potencial del campo en un punto dado se puede definir como el trabajo que realizan las fuerzas del campo al mover una carga unitaria positiva desde el punto dado hasta el infinito. Sí consideramos el trabajo que se realiza contra las fuerzas del campo y no el realizado por éste, el potencial del campo en el punto dado es igual al trabajo que hay que realizar al mover una carga unitaria positiva desde el infinito hasta el punto considerado. Es claro que esta definición de potencial no permite realizar una medida experimental del potencial en el punto dado del campo, ya que en el experimento no podemos alejarnos hasta el infinito. Precisamente por esto se dice que sólo la diferencia de potenciales entre dos puntos del campo tiene sentido físico y no el mismo potencial en uno u otro punto.

Se puede decir que el potencial en un punto dado se determina con exactitud de un valor constante arbitrario. En calidad de este valor constante se toma el valor del potencial en el infinito y en relación con éste se toma el valor del potencial en cualquier otro punto. Para mayor comodidad, suponen que el valor del potencial en el infinito es igual a cero.

Dentro de los márgenes de las observaciones indicadas, el potencial del campo de una carga puntual q_1 en un punto, alejado una distancia r de la carga, es igual a

$$\varphi(r) = q_1/r \qquad (134)$$

Ahora resulta muy fácil deducir, a qué es igual el potencial del campo de un sistema de cargas puntuales en uno u otro punto r.

ESTUDIANTE B: Llamemos $\varphi_1(\vec{r})$ y $\varphi_2(\vec{r})$ a los valores del potencial en el punto r, debidos a cada una de las cargas por separado, El potencial resultante es igual, por supuesto, a la suma algebraica de los potenciales de cada carga por separado

$$\varphi\ (\vec{r})\quad \varphi_1(\vec{r}) + \varphi_1(\vec{r}) + \ldots \qquad (135)$$

En esta suma, el potencial debido a una carga positiva se toma con signo más mientras que el de una carga negativa, con signo menos.

PROFESOR: Correcto. Veamos ahora el concepto de superficies equipotenciales. Se llama superficie equipotencial (o superficie de igual potencial) al lugar geométrico de todos los puntos del campo que tienen el mismo potencial. A través de cada punto del campo pasa una línea de fuerza y una superficie equipotencial. ¿Cómo están éstas orientadas entre sí?

ESTUDIANTE B: Yo sé que en cada punto del campo, la línea de fuerza y la superficie equipotencial correspondiente son mutuamente perpendiculares.

PROFESOR: ¿Podría usted demostrar esto?

ESTUDIANTE B: No, tal vez no puedo.

PROFESOR: Esta demostración no es difícil. Digamos que a través de cierto punto A pasa la línea de fuerza AA_1 y la superficie equipotencial S (figura 90). La intensidad del campo en el punto A se representa por el vector $\overrightarrow{E_A}$. Trasladamos la carga q_0 una distancia pequeña Δl, desde el punto A hasta cierto punto B, el cual descansa sobre la superficie equipotencial S.

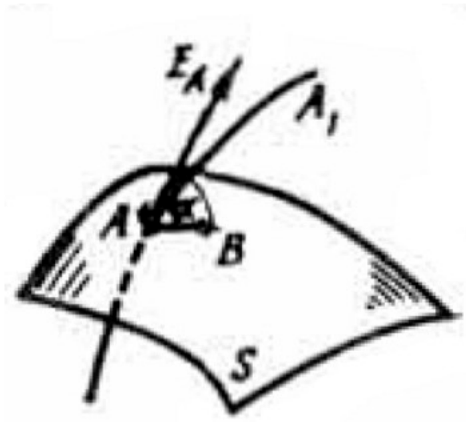


Figura 90.

El trabajo realizado durante este desplazamiento se expresa por la fórmula

$$A = F_e \Delta l \cos \alpha = E_A q_0 \Delta l \cos \alpha \qquad (136)$$

donde α es el ángulo entre el vector E_A y la dirección del desplazamiento. Este mismo trabajo se puede expresar por la diferencia de los potenciales de los puntos A y B. Así pues, podemos escribir otra relación.

$$A = q_0 (\varphi_A - \varphi_B) \qquad (137)$$

Puesto que los puntos A y B pertenecen a una misma superficie equipotencial, resulta $\varphi_A = \varphi_B$. Es decir, de acuerdo con (137) el trabajo A debe ser igual a cero. Colocando este resultado en la relación (136), obtenemos

$$E_A q_0 \Delta l \cos \alpha = 0 \qquad (138)$$

De todos los factores del miembro de la izquierda de la fórmula (138),solamente una cosa puede ser igual a cero. De esta manera concluimos que α = 90°. Es lógico que este mismo resultado lo obtendremos para diferentes direcciones de AB, con la única condición de que el desplazamiento se haga dentro de los límites de la superficie equipotencial S. La curvatura de la superficie no contradice los razonamientos hechos por cuanto los desplazamientos Δl son demasiado pequeños.

Para la representación gráfica del campo electrostático, además de las líneas de fuerza se dibujan los cortes de las superficies equipotenciales. Utilizando la mutua perpendicularidad de las líneas y las superficies equipotenciales, se puede, por intermedio de las líneas de fuerza conocidas, dibujar la familia. de cortes de las superficies equipotenciales, y viceversa. (Dirigiéndose al estudiante A.) Trate de dibujar los cortes de las superficies equipotenciales para el caso representado en la figura 88 a. Para no confundirlos con las líneas de fuerza, represente los cortes de las superficies por medio de líneas punteadas.

ESTUDIANTE A: Trataré de trazar las líneas punteadas de tal manera, que éstas corten siempre a las líneas de fuerza formando un ángulo recto. Este es mi dibujo (figura 91).

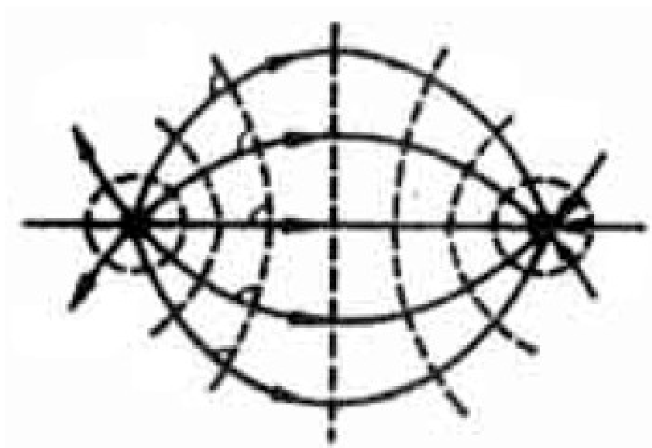


Figura 91.

PROFESOR: Su dibujo es correcto.

§ 24. ¿COMO SE COMPORTAN LAS LÍNEAS DE FUERZA EN LA VECINDAD DE LA SUPERFICIE DE UN CONDUCTOR?

PROFESOR: Coloquemos dentro de un campo electrostático un cuerpo conductor cualquiera. Ustedes saben muy bien que un conductor dentro de un campo está caracterizado por cierta magnitud física denominada capacidad eléctrica (o simplemente capacidad). Pero, ¿han pensado ustedes alguna vez en la siguiente pregunta: ¿por qué hablamos únicamente de la capacidad de un conductor y no de la capacidad de un dieléctrico?

ESTUDIANTE A: Nunca he pensado acerca de esto.

PROFESOR: ¿Cómo determina usted la capacidad de un conductor aislado?

ESTUDIANTE A: Como la cantidad de electricidad, que es necesario comunicarle a dicho conductor para aumentar su potencial en una unidad.

PROFESOR: Dese cuenta que usted aquí habla del potencial como de una característica del cuerpo. Sin embargo, hasta ahora el potencial se ha analizado como una característica del campo y como tal varía de un punto a otro. El potencial es una función de las coordenadas del punto del espacio en donde se considera el campo. ¿Se podría entonces considerar al potencial como una característica del cuerpo? Si es posible, explique entonces por qué.

ESTUDIANTE B: Esto es posible si el cuerpo es conductor, puesto que todos los puntos de un conductor introducido en un campo electrostático tienen el mismo potencial, es decir, el conductor resulta ser un cuerpo equipotencial.

PROFESOR: ¿En qué fundamenta usted su afirmación?

ESTUDIANTE B: En todo conductor hay cargas libres. Polo tanto, si entre dos puntos cualesquiera de éste existiera una diferencia potencial, entre los mismos circularía una corriente eléctrica, lo cual, por supuesto, es imposible.

PROFESOR: Correcto. Se puede decir que cuando introducimos un conductor en un campo electrostático, las cargas libres del conductor se distribuyen de tal manera, que la intensidad del campo dentro del conductor se hace igual a cero. Esto significa que todos los puntos del conductor (tanto en su interior como en su superficie) tienen un mismo potencial. El hecho de que el potencial es constante y el mismo en todos los puntos del conductor permite hablar del potencial de éste como potencial del cuerpo. Subrayo, que en un dieléctrico no existen cargas libres y por esto la distribución de las cargas considerada arriba no se lleva a cabo. A propósito. ¿en qué forma se distribuyen las cargas libres en un conductor?

ESTUDIANTE B: Estas se concentran sobre su superficie, agrupándose tanto más densamente, cuanto mayor sea el radio de curvatura de la superficie. La mayor densidad de carga se encuentra en las puntas.

PROFESOR: Exactamente. Así pues, hemos aclarado con usted que todo conductor en un campo eléctrico es un cuerpo equipotencial. De aquí deducimos que la superficie de un con. ductor debe ser una superficie equipotencial. Utilizando esta deducción, responda a la siguiente pregunta: ¿Cómo se comportan las líneas de fuerza de un campo electrostático en la vecindad de la superficie de un conductor?

ESTUDIANTE B: Puesto que las líneas de fuerza son siempre perpendiculares a las superficies equipotenciales, dichas líneas se «clavan» perpendicularmente en la superficie del conductor.

PROFESOR: Desafortunadamente con frecuencia los examinandos no saben esto. Yo creo que el dibujar las líneas de fuerza del campo eléctrico de un condensador plano, dentro del cual reencuentra una esfera metálica, para usted no constituye ninguna dificultad. Generalmente esta pregunta provoca en los examinandos serias reflexiones.

ESTUDIANTE B: Las líneas de fuerza deben aproximarse a las láminas del condensador y a la superficie de la esfera formando con éstas un ángulo recto. Por lo tanto, el diagrama de las líneas de fuerza tendrá el aspecto indicado en la figura 92.

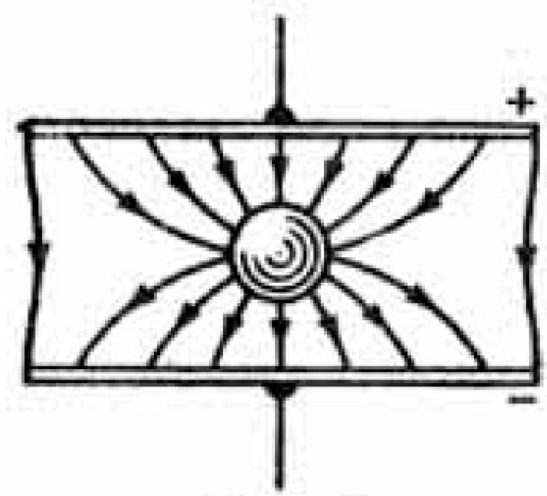


Figura 92.

PROFESOR: Correcto. Yo no comprendo, por qué algunos examinandos consideran que las líneas de fuerza deben eludir a la esfera. Y ahora analicemos el siguiente problema. Una carga puntual +q que se encuentra a una distancia r de la superficie de la Tierra, inducirá en ésta una carga de signo contrario, razón por la cual entre la carga y la Tierra existirá una fuerza eléctrica de atracción. Se pide calcular dicha fuerza. Les propongo este problema a ustedes dos.

ESTUDIANTE A: La carga que se induce en la Tierra debe tener un valor igual a +q. De aquí se deduce, que la fuerza que buscamos es igual a q^2/r^2

ESTUDIANTE B: No estoy de acuerdo con este resultado. El estudiante A supone que la carga inducida en la Tierra está concentrada en un punto (punto A en la figura 93 a).

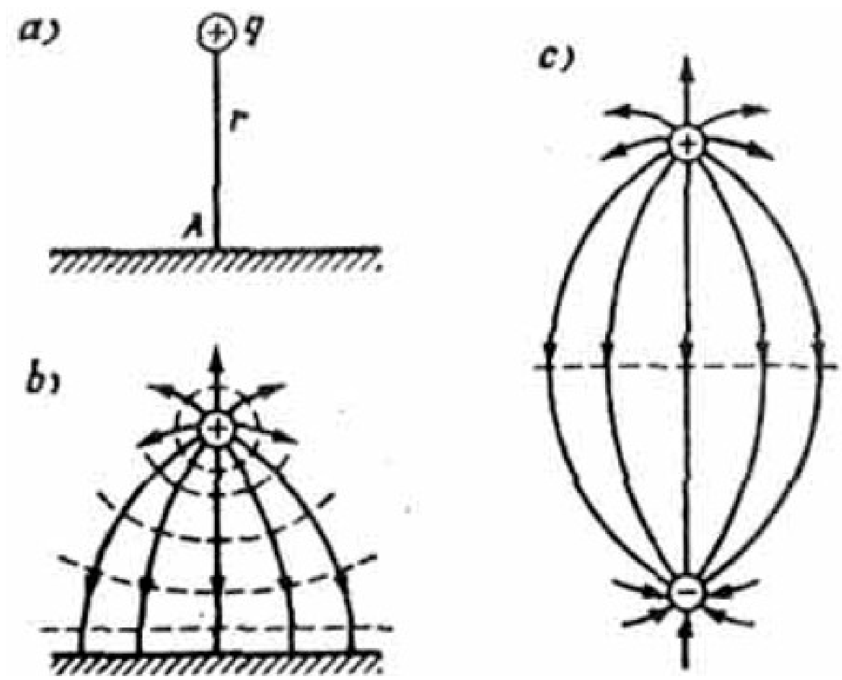


Figura 93.

Sin embargo, en realidad la carga inducida no se concentra en un punto, sino que se distribuye sobre la superficie de la Tierra. Por lo tanto, es bien claro que la fuerza que se busca debe ser menor que el valor q^2/r^2.

PROFESOR: Yo estoy completamente de acuerdo con usted. Sin embargo, ¿cómo podríamos encontrar la fuerza de atracción entre la carga y la Tierra?

ESTUDIANTE B: Me parece que es necesario analizar el campo eléctrico que existe entre la carga y la superficie de la Tierra. La superficie de la Tierra es, por supuesto, una superficie equipotencial; por consiguiente, cerca de la superficie de la Tierra, las superficies equipotenciales del campo deben ser casi planas. En cambio, cerca de la carga puntual las superficies equipotenciales deben tener forma esférica. Esto permite dibujar cualitativamente el diagrama de las superficies equipotenciales (más precisamente, de los cortes de las superficies). Teniendo este diagrama, yo puedo también, de acuerdo con la regla conocida, trazar las líneas de fuerza. Esto está representado en la figura 93 b, en donde las líneas de fuerzas se representan por líneas llenas, y los cortes de las superficies, por líneas punteadas.

PROFESOR: Continúe su análisis. ¿No le recuerda nada el diagrama que usted ha dibujado de las líneas de fuerza en la figura 93 b?

ESTUDIANTE B: Sí, es verdad. Este diagrama es similar al diagrama de las líneas de fuerza del campo creado por dos cargas puntuales de igual magnitud y de signos contrarios. Lo dibujaré cerca: ver figura 93 c. Ahora todo está claro. En ambos casos (ver figura 93, b y c) la configuración del campo cerca de la carga +q es la misma. De acuerdo con la fórmula (130) esto significa, que en ambos casos sobre la carga +q debe actuar una misma fuerza. De esta manera, la fuerza que buscamos es igual a $q^2/4r^2$.

PROFESOR: Sus razonamientos son correctos. En estos ejemplos se ve muy bien, que la noción de campo puede resultar muy útil.

§25. ¿COMO ANALIZA USTED EL MOVIMIENTO EN UN CAMPO ELECTROSTÁTICO HOMOGÉNEO?

PROFESOR: Supongamos que un cuerpo cargado se mueve en un campo electrostático homogéneo, es decir, en un campo cuya intensidad E en cada punto del espacio es la misma tanto en valor numérico como en dirección. Como ejemplo podemos considerar el campo dentro de un condensador plano. ¿Encuentra usted alguna analogía entre los problemas del movimiento de un cuerpo cargado en un campo electrostático homogéneo con algunos de los problemas analizados atrás?

ESTUDIANTE B: Me parece que existe bastante analogía con los problemas del movimiento de un cuerpo en el campo gravitatorio, puesto que, a distancias relativamente pequeñas, el campo gravitatorio de la Tierra puede considerarse homogéneo.

PROFESOR: Exactamente. ¿Y en qué consiste la diferencia entre los casos señalados de los movimientos en el campo electrostático y en el campo gravitatorio?

ESTUDIANTE B: Porque sobre el cuerpo actúan fuerzas distintas: en el campo electrostático, sobre el cuerpo actúa la fuerza $F_e = Eq$ (dicha fuerza le comunica al cuerpo una aceleración $a_e = Eq/m$), mientras que en el campo gravitatorio, sobre el cuerpo actúa la fuerza $P = mg$ (ésta le comunica al cuerpo la aceleración g). Aquí, m es la masa del cuerpo y q, su carga eléctrica.

PROFESOR: Quisiera que todos los examinandos asimilaran el hecho simple de que los movimientos de un cuerpo en campos homogéneos cualesquiera son idénticamente iguales, la diferencia consiste solamente en el valor de la fuerza que actúa sobre el cuerpo en uno u otro campo.

El movimiento de un cuerpo cargado en un campo electrostático homogéneo tiene el mismo carácter, que el movimiento de una simple piedra en el campo gravitatorio terrestre. Estudiemos algunos problemas. en los cuales el movimiento de un cuerpo tiene lugar simultáneamente en dos campos: el gravitatorio y el electrostático. *Un cuerpo de masa m y de carga +q es lanzado con una velocidad inicial v_0 y formando un ángulo α con el horizonte. El cuerpo se mueve simultáneamente en el campo gravitatorio y en un campo electrostático homogéneo de intensidad E. Las líneas de fuerza de los dos campos están dirigidas verticalmente hacia abajo (figura 94 a). Encontrar el tiempo t_1 el alcance L_1 del lanzamiento y la altura máxima H_1.*

ESTUDIANTE B: Sobre el cuerpo actúan dos fuerzas: el peso mg y la fuerza eléctrica $F_e = Eq$. En el caso dado las dos fuerzas son paralelas. Como en el § 5, descompongo el vector de la velocidad inicial v_0 en dos direcciones...

PROFESOR (interrumpiendo): ¿Usted quiere repetir todo el proceso de la solución que se demostró en el problema análogo del § 5?

ESTUDIANTE B: Si, aunque sea en breve.

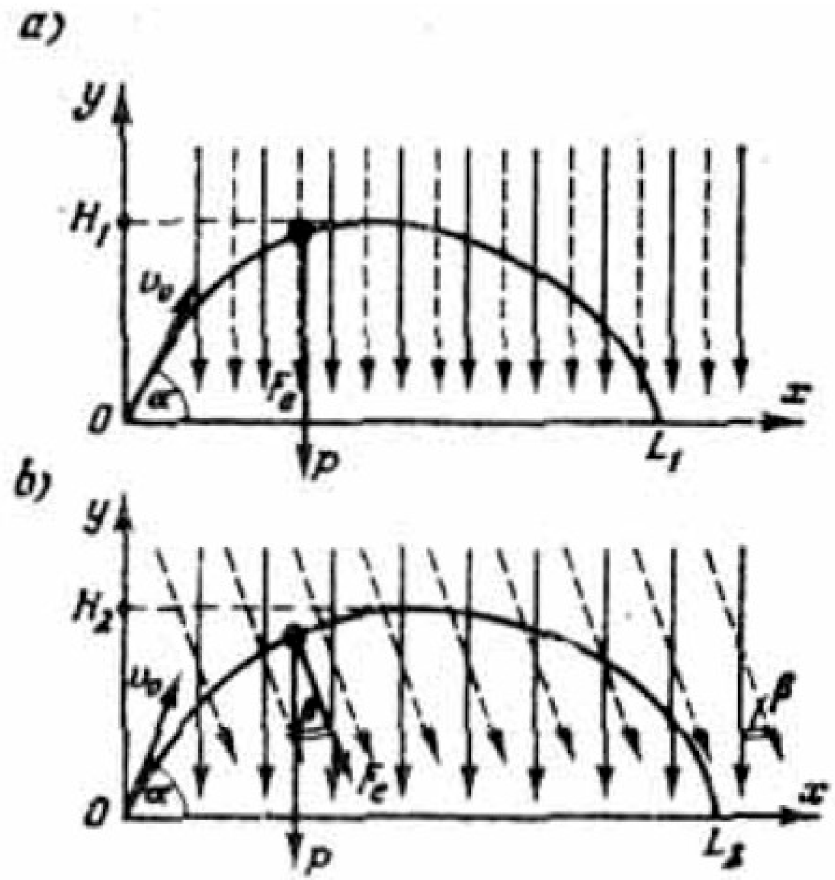


Figura 94.

PROFESOR: No hay necesidad. Usted puede de una vez utilizar los resultados (15) — (17), imagínese que ahora el cuerpo se mueve en un campo gravitatorio «más pesado», caracterizado por una aceleración igual a la suma g + Eq/m. En las relaciones (15) — (17) haga el siguiente cambio

$$g \rightarrow (g + Eq/m) \qquad (139)$$

y usted inmediatamente obtendrá los resultados que busca:

$$T_1 = 2v_0 \text{ sen } \alpha \;/(g + Eq/m) \qquad (140)$$

$$L_1 = v_0^2 \text{ sen } 2\alpha/(g + Eq/m) \qquad (141)$$

$$H_1 = \tfrac{1}{2} v_0^2 \text{ sen}^2 \alpha/(g + Eq/m) \qquad (142)$$

ESTUDIANTE A: No entiendo una parte. En comparación con el problema correspondiente del § 5, en el problema dado sobre el cuerpo actúa una fuerza complementaria F_e. Esta fuerza está dirigida verticalmente y por lo tanto no debe influir en el desplazamiento horizontal del cuerpo. ¿Por qué razón, en el caso considerado, esta fuerza influyó en el alcance L_1 del lanzamiento del cuerpo?

PROFESOR: El alcance depende del tiempo que dure el lanzamiento, y dicho tiempo se determina del análisis del desplazamiento vertical del cuerpo.

Ahora cambiemos un poco el problema: *digamos ahora que las líneas de fuerza del campo electrostático forman un ángulo β con la vertical (figura 94 b). Como en el problema anterior, se pide encontrar el tiempo T_2 y el alcance L_2 del lanzamiento, como también la altura máxima H_2.*

ESTUDIANTE A: Primero descompongo la fuerza F_e en dos componentes: vertical (F_e cos β) y horizontal (Fe sen β) problema me recuerda al problema del § 5 en donde se tomaba en cuenta la resistencia del aire favorable; en lugar de la «fuerza del aire» aquí actúa la componente F_e sen β.

PROFESOR: Es cierto. Sólo debe tener en cuenta, que a diferencia del problema mencionado con el aire a favor, aquí será otra fuerza vertical, o sea: mg — F_e sen β.

ESTUDIANTE A: Yo utilizo las relaciones (15), (16) y (18), en las cuales hago los siguientes cambios:

$$g \rightarrow. (g + Eq \cos \beta / m),$$

$$F/P \rightarrow (Eq \text{ sen } \beta)/(mg + Eq \cos \beta) \qquad (143)$$

Después de esto obtengo los resultados que buscaba:

$$T_2 = 2v_0 \text{ sen } \alpha \ / \ (g + Eq \cos \beta / m) \qquad (144)$$

$$L_2 = \frac{v_0^2 sen\ 2\alpha}{g + Eq \cos \beta / m}[1 + tg\ \alpha(Eq\ sen\ \beta)/(mg + Eq \cos \beta] \qquad (145)$$

$$H_2 = ½\ v_0^2 \text{ sen}^2 \alpha \ / \ (g + Eq\cos \beta / m) \qquad (146)$$

PROFESOR: Todo está correcto. Es un pesar que los examinandos frecuentemente no sepan establecer la analogía entre el movimiento en el campo gravitatorio y el movimiento en un campo electrostático uniforme. Por esta razón problemas como éste resultan para ellos demasiado difíciles.

ESTUDIANTE A: Nosotros no hemos estudiado antes este tipo de problemas. Sobre este tema sólo estudié problemas sobre el movimiento de un electrón entre las láminas de un condensador plano, despreciando la acción del campo gravitatorio sobre el electrón: Recuerdo que estos problemas me parecían muy difíciles.

PROFESOR: Todos estos problemas son un caso particular del problema, representado en la figura 94 a, puesto que durante el movimiento de un electrón dentro de un condensador se puede despreciar la influencia del campo gravitatorio. Veamos uno de estos problemas. *Un electrón penetra dentro de un condensador plano, con una velocidad inicial v_1, formando un ángulo α_1 con las láminas del condensador, y sale de éste formando un ángulo α_2 con las láminas, como se indica en la figura 95. La longitud de las láminas es igual a L. Encontrar la intensidad del campo E del condensador y la energía cinética del electrón al salir de éste. La masa m y la carga q del electrón se consideran conocidas.*

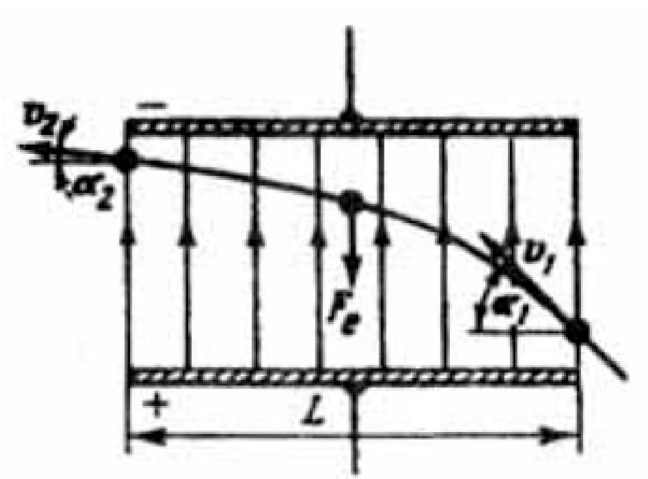


Figura 95.

Al resolver el problema, llamo v_2 a la velocidad del electrón al salir del condensador. A lo largo de las láminas, el electrón se mueve uniformemente, de ahí encontramos el tiempo T de su movimiento dentro del condensador:

$$T = L/(v_1 \cos \alpha).$$

Las componentes inicial y final de la velocidad del electrón, perpendiculares a las láminas, están relacionadas por medio de la relación cinética conocida para el movimiento uniformemente retardado:

$$v_2 \text{ sen } \alpha_2 = v_1 \text{ sen } \alpha_1 — (Eq/m)\ T = v_1 \text{ sen } \alpha_1 — (Eq/m)L/(v_1 \cos \alpha_1).$$

De aquí, teniendo en cuenta que la componente de la velocidad, paralela a las láminas, no varía ($v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2$), obtenemos

$$v_1 \cos \alpha_1 \text{ tg } \alpha_2 = v1 \text{ sen } \alpha_1 – (Eq/m)L/(v_1 \cos \alpha_1)$$

e esta igualdad encontramos la intensidad del campo del condensador•

$$E = (\text{tg } \alpha_1 — \text{tg } \alpha_2) m v_1^2 \cos^2 \alpha_1/(qL) \qquad (147)$$

La energía cinética del electrón después de salir del campo del condensador es igual a

$$mv_1^2 = (mv_1^2/2)(\cos^2 \alpha_1/\cos^2 \alpha_2) \qquad (148)$$

¿Todo está entendido en este problema?

ESTUDIANTE A: Si, ahora comprendo, cómo se resuelven tales problemas.

PROFESOR: Son interesantes los problemas sobre las oscilaciones de un péndulo cargado, colocado dentro de un condensador plano. Estudiemos el siguiente problema.

Una esferita de masa m y de carga q está suspendida de un hilo delgado de longitud l, dentro de un condensador plano de láminas horizontales. La intensidad del campo del condensador es igual a E, las líneas de fuerza están dirigidas hacia abajo (figura 96, a). Se pide encontrar el período de las oscilaciones de este péndulo.

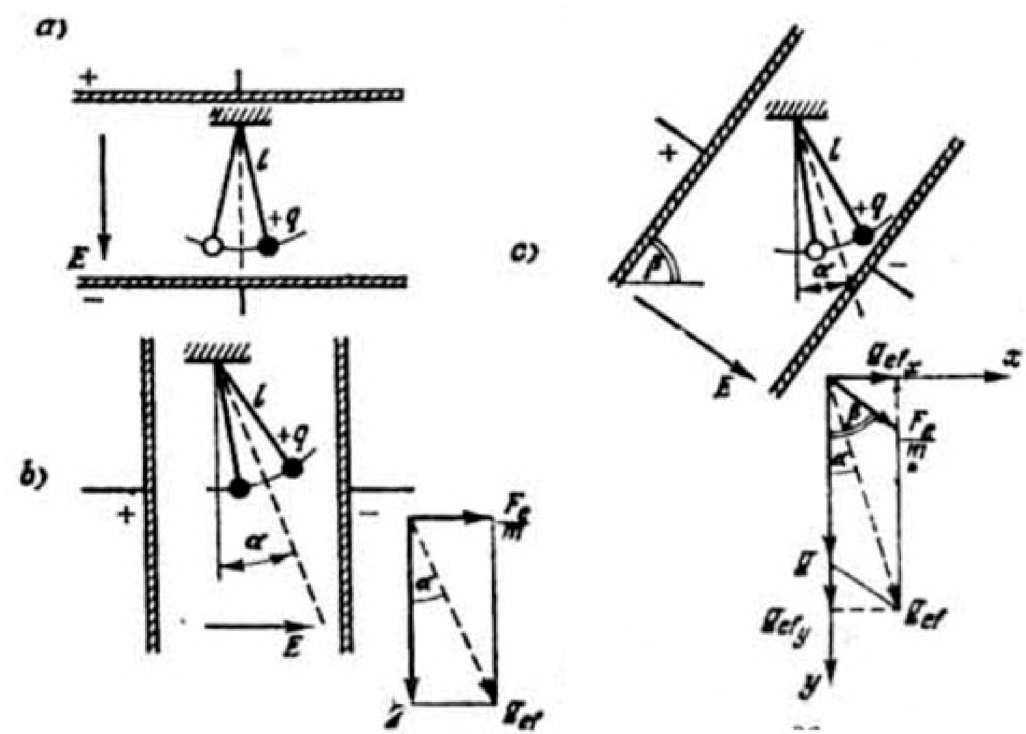


Figura 96.

ESTUDIANTE B: Puesto que en el caso dado las líneas de fuerza del campo electrostático y del campo gravitatorio están igualmente dirigidas, entonces, puedo utilizar el resultado (75) para el período de las oscilaciones de un péndulo simple, cambiando la aceleración g por la suma aritmética de las aceleraciones (g + Eq/m). De esta manera, el perlado que buscamos de las oscilaciones es igual a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{Eq}{m}}} \qquad (149)$$

PROFESOR: Exactamente. Como ustedes ven, el problema propuesto resulta bien sencillo, si se sabe utilizar la analogía entre el movimiento en un campo electrostático uniforme y el movimiento en el campo gravitatorio.

ESTUDIANTE A: Por su estructura la fórmula (149) es similar a la (77).

PROFESOR: Es correcta su observación. Exceptuando sólo que en (77) el sumando complementario que agregamos a la aceleración g estaba relacionado con la aceleración del sistema (en el cual se consideraban las oscilaciones del péndulo), mientras que en (149) el sumando complementario que agregábamos a g se debía a la presencia de una interacción complementaria, ¿Cómo cambia la fórmula (149), si cambiamos el signo de la carga en las láminas del condensador?

ESTUDIANTE A: En tal caso, el período de las oscilaciones será igual a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - \frac{Eq}{m}}} \qquad (150)$$

PROFESOR: Correcto. ¿Qué sucederá con el péndulo, si en este caso aumentamos gradualmente la intensidad del campo del condensador?

ESTUDIANTE A: El período de las oscilaciones crecerá y tenderá a infinito para E = mg/q. Si continuamos aumentando la intensidad del campo E, tendremos que sujetar el hilo a la lámina inferior del condensador y no a la de arriba.

PROFESOR: ¿Y cuál será en este caso la fórmula para el período de las oscilaciones?

ESTUDIANTE A: Esta fórmula será la siguiente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{Eq}{m} - g}} \qquad (151)$$

PROFESOR: Está bien. Ahora compliquemos el problema: *analizaremos las oscilaciones de una esferita cargada dentro de un condensador, cuyas láminas ya no están orientadas horizontalmente sino verticalmente (figura 96 b). En este caso la aceleración g y (Eq/m) están dirigidas formando entre si un ángulo recto. Como en el problema anterior, se pide encontrar el período de las oscilaciones del péndulo y el ángulo α que formará la dirección del hilo en su posición de equilibrio con la vertical.*

ESTUDIANTE B: Al resolver este problema, tendré en cuenta las observaciones hechas en este parágrafo y en el § 12. De acuerdo con esto puedo decir:

1. el período de las oscilaciones se expresa por medio de la aceleración efectiva g_{ef} que representa la suma vectorial de las aceleraciones, la de la gravedad terrestre y la del campo electrostático;
2. la dirección del hilo en la posición de equilibrio del péndulo coincide con la dirección del vector de la aceleración efectiva (esta dirección está indicada en la figura 96, b por medio de una línea punteada).

De esta manera,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^2+\left(\frac{Eq}{m}\right)^2}} \qquad (152)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = (Eq/m)/g \qquad (153)$$

PROFESOR: Exactamente. Yo creo que ahora no es difícil analizar el caso general, *cuando las láminas del condensador forman con la horizontal un ángulo β (figura 96 b). La pregunta es la misma: encontrar el período de las oscilaciones y el ángulo α que forman el hilo, en su posición de equilibrio, con la vertical.*

ESTUDIANTE B: Como en el caso anterior, la aceleración efectiva es la suma vectorial de la aceleración de la gravedad terrestre y la aceleración del campo electrostático y su dirección coincide con la del hilo en la posición de equilibrio. El valor de g_{ef} se puede hallar, utilizando el teorema del coseno bien conocido en la trigonometría:

$$g_{ef}^2 = g^2 + (Eq/m)^2 + 2g(Eq/m)\cos\beta$$

De esta manera

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^2+\left(\frac{Eq}{m}\right)^2+2g\left(\frac{Eq}{m}\right)\cos\beta}} \qquad (155)$$

PROFESOR: Su resultado es correcto. Es evidente que para β = 0 se obtiene el resultado para el caso, cuando las láminas del condensador están colocadas horizontalmente y para β =90° para el caso cuando las láminas se colocan verticalmente. Compruebe esto.

ESTUDIANTE B: Si β = 0, cos β = 1 y sen β = 0. En tal caso la fórmula (154) se convierte en la fórmula (149) y la tg α = 0 (la posición de equilibrio del hilo es la dirección vertical). Si β = 90°, cos β = 0 y sen β = 1. En este caso la expresión (154) se convierte en la expresión (152), mientras que la fórmula (155) queda igual a la fórmula (153).

PROFESOR: De esta manera, el problema de las oscilaciones de un péndulo cargado introducido en un condensador plano queda totalmente analizado.

Para terminar, quiero solicitar lo siguiente: *calcular el período de las oscilaciones de una esferita cargada, cuando en el punto de suspensión del hilo se encuentra una carga mas, exactamente igual (figura 97). Aquí no hay ningún condensador.*

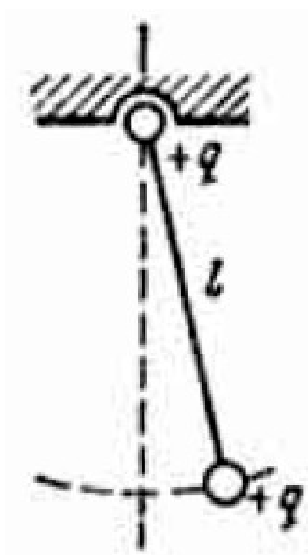


Figura 97.

ESTUDIANTE A: Según la ley de Coulomb la esferita será repelida del punto de suspensión por una fuerza igual a q^2/l^2. Esta fuerza debe comunicarle a la esferita una aceleración $q^2/(l^2m)$. En la fórmula para el período de las oscilaciones hay que tener en cuenta esta aceleración. El resultado es el siguiente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+\left(\frac{q^2}{l^2 m}\right)}} \qquad (156)$$

PROFESOR (dirigiéndose al estudiante B ¿Usted está de acuerdo con el resultado?

ESTUDIANTE B: No, no estoy de acuerdo. Para que la fórmula (156) sea correcta, es necesario que la aceleración $q^2/(l^2m)$ esté todo el tiempo dirigida verticalmente hacia abajo. En realidad esta aceleración está dirigida en esta forma solamente cuando el péndulo pasa por su posición de equilibrio. Por esta razón, es lógico que la fórmula (156) no es correcta para todas los casos. Sin embargo, me es difícil encontrar el resultado correcto.

PROFESOR: Está bien que usted haya tomado como falsa la fórmula (156). En este caso la fuerza eléctrica está todo el tiempo dirigida a lo largo del hilo y por lo tanto se compensa con la reacción de éste. De aquí se concluye que la fuerza eléctrica no conduce a la aparición de ninguna fuerza restitutoria y, por consiguiente, no puede influir en el período de las oscilaciones del péndulo.

ESTUDIANTE B: Es decir, ¿en el caso dado, el período de las oscilaciones se determina por medio de la fórmula (75) para un péndulo no cargado eléctricamente?

PROFESOR: Exactamente. En el caso que estamos analizando el campo de las fuerzas eléctricas no es homogéneo y no podemos encontrar aquí ninguna analogía con el campo gravitatorio.

PROBLEMAS

45. Un electrón penetra en un condensador plano paralelamente a sus láminas y a una distancia de 4 cm de la lámina cargada positivamente y cuya longitud es de 15 cm. ¿Cuánto tiempo demora el electrón en caer en dicha lámina, si la intensidad del campo en el condensador es igual a 500 V/m? ¿Cuál es la velocidad mínima que debe tener electrón para que éste no llegue a caer sobre la lámina? La masa del electrón es igual a $9 \cdot 10^{-28}$ g, y su carga, igual a $4{,}8^{-19}$ u.e.e. CGS.

46. Un electrón penetra en un condensador plano paralelamente a sus láminas y con una velocidad igual a $3 \cdot 10^6$ m/s. Encontrar la intensidad del campo en el

condensador, si el electrón sale del condensador formando un ángulo de 30° con las láminas. La longitud de la lámina es de 20 cm; la masa y la carga del electrón son conocidas (ver las condiciones del problema N° 45).

47. Dentro de un condensador plano cuyo campo tiene una intensidad igual a E, gira uniformemente una esferita de masa m y carga +q, suspendida de un hilo de longitud l (figura 98).

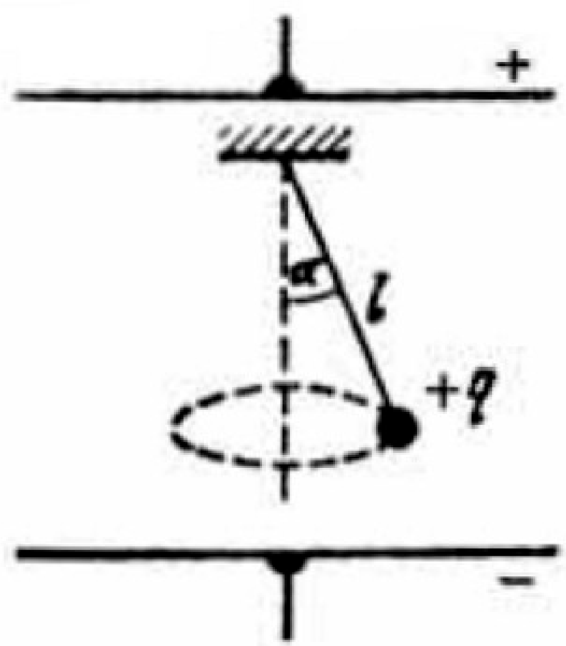


Figura 98.

El ángulo de inclinación del hilo respecto a la vertical es igual a α. Encontrar la tensión del hilo y la energía cinética de la esferita.

48. Dos esferitas de masas m_1 y m_2 con cargas $+q_1$ y $+q_2$ respectivamente están unidas por un hilo que pasa a través de una polea inmóvil. Calcular la aceleración de las esferitas y la tensión del hilo, si todo el sistema es introducido en un campo electrostático homogéneo de intensidad E, y cuyas líneas de fuerza están dirigidas verticalmente hacia abajo. Se desprecia la interacción entre las esferitas cargadas.

49. En un campo electrostático uniforme de intensidad E y cuyas líneas de fuerza están dirigidas verticalmente hacia arriba, puede girar en el plano vertical atada a un hilo de longitud l una esferita de masa m y carga +q. ¿Cuál es la velocidad horizontal que hay que comunicarle a la esferita en el punto más elevado de su

trayectoria, para que la tensión del hilo en el punto más bajo de la trayectoria sea 10 veces mayor que el peso de la esferita?

§ 26. ¿SABE USTED UTILIZAR LA LEY DE COULOMB?

PROFESOR: Detengámonos un poco más detalladamente en la ley de Coulomb y en la resolución de problemas relacionados con la aplicación de esta ley. Antes que todo les solicito que enuncien la ley de Coulomb.

ESTUDIANTE A: La fuerza de interacción de dos cargas eléctricas es proporcional al producto de dichas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre éstas.

PROFESOR: Su enunciado es incompleto.

ESTUDIANTE B: ¿Seguramente habrá que agregar que la fuerza de interacción es inversamente proporcional a la constante dieléctrica ε del medio?

PROFESOR: Por supuesto que este detalle no sobra. Sin embargo, lo principal no es esto. Ustedes de nuevo olvidan que la fuerza es una magnitud vectorial. Por lo tanto, al hablar del valor numérico de una fuerza, no olviden indicar su dirección (a propósito, recuerden el análisis de la segunda ley de Newton que hicimos en el § 4).

ESTUDIANTE A: He entendido. ¿Es necesario agregar que la fuerza, con la cual interaccionan las cargas, está dirigida a lo largo de la línea que une a estas cargas?

PROFESOR: Esto es poco todavía. Todavía tiene dos sentidos.

ESTUDIANTE A: Es necesario decir, que las cargas se repelen, si son del mismo signo y que se atraen si son de signos contrarios.

PROFESOR: Correcto. Ahora, si ustedes reúnen todas estas observaciones, obtendrán el enunciado completo de la ley de Coulomb. No sobra subrayar que esta ley se refiere a la interacción de cargas puntuales.

ESTUDIANTE B: ¿Es posible encontrar una fórmula de la ley de Coulomb que contenga una información completa acerca de esta ley? La forma, como generalmente escriben esta fórmula

$$F = B\,\frac{q1q2}{\varepsilon r^2} \qquad (157)$$

no contiene ninguna indicación acerca de la dirección de la fuerza.

PROFESOR: Es posible. Para esto es necesario, primero, precisar de qué fuerza se trata. Supongamos que se trata de la fuerza con la cual la carga q_1 actúa sobre la carga q_2 (y no al contrario). Escogemos los ejes de coordenadas en cuyo origen se encuentra la carga q_1. Trazamos desde el origen de las coordenadas un vector $\vec{r}$ hasta el punto, donde se encuentra la carga q_2 (figura 99).

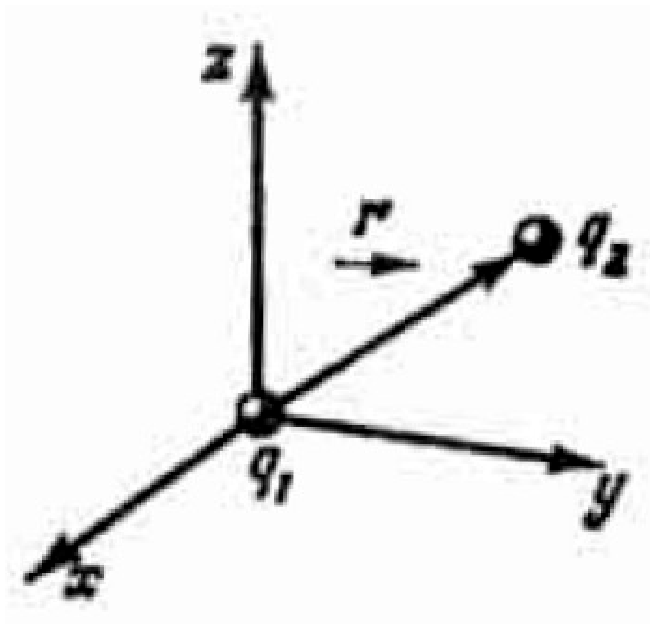


Figura 99.

Este vector se denomina radio-vector (o vector-posición) de la carga q_2. En este caso la forma completa de escribir la ley de Coulomb es la siguiente:

$$\vec{F} = B\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^3}\vec{r} \qquad (158)$$

donde el coeficiente ε depende del sistema de unidades que se escoja.

ESTUDIANTE A: Pero en esta fórmula, la fuerza es inversamente proporcional al cubo de la distancia entre las cargas y no al cuadrado.

PROFESOR: No, no es así. El vector $\vec{r}/r$ tiene un valor numérico igual a la unidad (adimensional) y se denomina vector unitario. Este vector se utiliza solamente para indicar la dirección.

ESTUDIANTE A: ¿Esto significa que cuando me pregunten acerca de la ley de Coulomb, yo puedo simplemente escribir la fórmula (158) y nada más?

PROFESOR: Solamente hay que explicar el significado de cada signo utilizado en la fórmula.

ESTUDIANTE A: ¿Y si escribo la fórmula (157) en lugar de la fórmula (158)?

PROFESOR: Entonces usted debe explicar con palabras cuál es la dirección y el sentido de la fuerza de Coulomb.

ESTUDIANTE A: ¿En qué forma la fórmula (158) indica si las cargas se atraen o se repelen?

PROFESOR: Si las cargas son del mismo signo, el producto q_1q_2 es positivo. En este caso el vector $\vec{F}$ tiene igual sentido que el vector $\vec{r}$. $\vec{F}$ es la fuerza aplicada a la carga q_2, la carga q_1 repele a la carga q_2. Si las cargas tienen signos contrarios, el producto $q_1 \cdot q_2$ es negativo y entonces el vector $\vec{F}$ es antiparalelo al vector $\vec{r}$, es decir, la carga q_1 atrae a la carga q_2.

ESTUDIANTE A: Explique, por favor, qué es necesario saber sobre el coeficiente B.

PROFESOR: Este coeficiente depende del sistema de unidades que se ha escogido. Si usted utiliza el sistema de u. e. e. CGS, el valor de B es igual a 1, si utilizan el sistema SI (Sistema internacional de Unidades), B será igual a $1/(4\pi\varepsilon_0)$, donde la constante ε_0 es igual a $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ C^2/m^2N. Estudiemos algunos problemas sobre la ley de Coulomb.

Problema 1. *Cuatro cargas iguales de valor q cada una, están situadas en los vértices de un cuadrado. ¿Cuál será la carga Q de signo contrario que es necesario colocar en el centro del cuadrado para que todo el sistema de cargas se encuentre en equilibrio?*

ESTUDIANTE A: El sistema consta de cinco cargas eléctricas: cuatro conocidas y una desconocida. Puesto que el sistema se encuentra en equilibrio, la suma de las fuerzas aplicadas a cada una de las cinco cargas es igual a cero. Es decir, hay que analizar el equilibrio de cada una de las cinco cargas.

PROFESOR: Este trabajo sobra. Fácilmente pasemos a imaginar que la carga Q, independientemente de su valor, se encontrará en equilibrio debido a su posición geométrica. Por esta razón, la condición de equilibrio para dicha carga no resuelve nada. Las otras cuatro cargas q por la simetría del cuadrado son completamente equivalentes. Por esto, es suficiente analizar el equilibrio de una sola de estas cargas, no importa cuál sea. Escojamos. por ejemplo, la carga situada en el punto A (Figura 100). ¿Qué fuerzas actúan sobre esta carga?

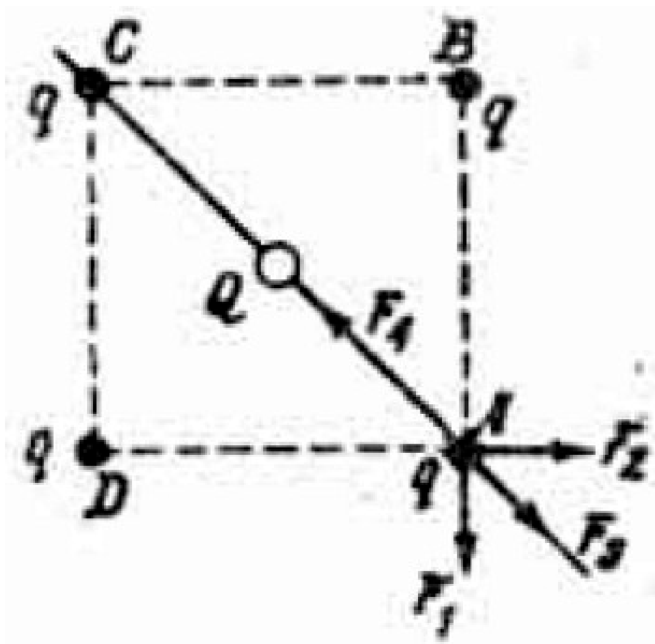


Figura 100.

ESTUDIANTE A: La fuerza F_1 por parte de la carga situada en el punto B, la fuerza F_2 por parte de la carga situada en el punto D y, finalmente. la fuerza que ejerce la carga que buscamos y que se encuentra en el centro del cuadrado.

PROFESOR: Dígame, por favor, ¿por qué usted no tuvo en cuenta la carga, situada en el punto C?

ESTUDIANTE A: Porque la carga situada en el centro del cuadrado le «apantalla».

PROFESOR: Su error es muy elemental. Recuerde lo siguiente: en un sistema de cargas eléctricas sobre cada una de las cargas actúan las fuerzas debidas a las demás cargas sin exclusión, de tal manera que es necesario agregar la fuerza F_3, que actúa sobre la carga situada en A y debida a la carga colocada en el punto C. El diagrama completo de las fuerzas está indicado en la figura 100.

ESTUDIANTE A: Lo demás es muy sencillo. Escojo la dirección AC y proyecto sobre esta dirección todas las fuerzas aplicadas a la carga situada en el punto A. La suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas debe ser igual a cero, es decir,

$$F_4 = 2F_1 \cos 45° + F_3$$

Representando por a al lado del cuadrado, escribimos esta igualdad en la forma

$$\frac{Qq}{\frac{a^3}{2}} = \sqrt{2}\frac{q^2}{a^3} + \frac{q^2}{2a^3}$$

De aquí encontramos

$$Q = \left(\frac{q}{4}\right)\left(2\sqrt{2} + 1\right) \qquad (159)$$

PROFESOR: Correcto. ¿Cómo cree usted, el equilibrio de este sistema de cargas será estable?

ESTUDIANTE B: No, es un equilibrio inestable. Basta con desplazar un poco a una de las cargas y todas las demás entrarán en movimiento destruyéndose de esta manera el sistema.

PROFESOR: Exactamente. Resulta que, en general, es imposible crear una configuración de cargas eléctricas inmóviles que.se mantenga en equilibrio estable.

Problema 2. *Dos esferitas de masas, radios y cargas iguales, y que penden de un punto y de hilos de igual longitud se sumergen en un dieléctrico líquido, cuya permeabilidad eléctrica es igual a ε y su densidad igual a ρ_0. ¿Cuál debe ser la densidad ρ de las esferitas, para que el ángulo de separación de los dos hilos tanto en el aire como en el dieléctrico sea el mismo?*

ESTUDIANTE B: La separación de los hilos depende de la fuerza de Coulomb de repulsión de las esferitas. Sea $F_{\varepsilon 1}$ la fuerza de Coulomb de repulsión en el aire y $F_{\varepsilon 2}$ en el dieléctrico.

PROFESOR: ¿En qué se diferencian estas dos fuerzas?

ESTUDIANTE B: Como, según condición del problema, el ángulo de separación de los hilos en ambos casos es el mismo, entonces, será también igual la distancia entre las dos esferitas. Por lo tanto, la diferencia entre las fuerzas $F_{\varepsilon 1}$ y $F_{\varepsilon 2}$ es debida solamente a la permeabilidad dieléctrica

$$F_{\varepsilon 1} = \varepsilon F_{\varepsilon 2} \qquad (160)$$

Analicemos el caso concreto, cuando las bolitas se encuentran en el aire. Del equilibrio de la esferita concluimos que la suma de la fuerza $F_{\varepsilon 1}$ y del peso (suma vectorial) debe estar dirigida a lo largo del hilo, puesto que, en caso contrario, esta fuerza no puede ser equilibrada por la reacción del hilo (figura 101, a).

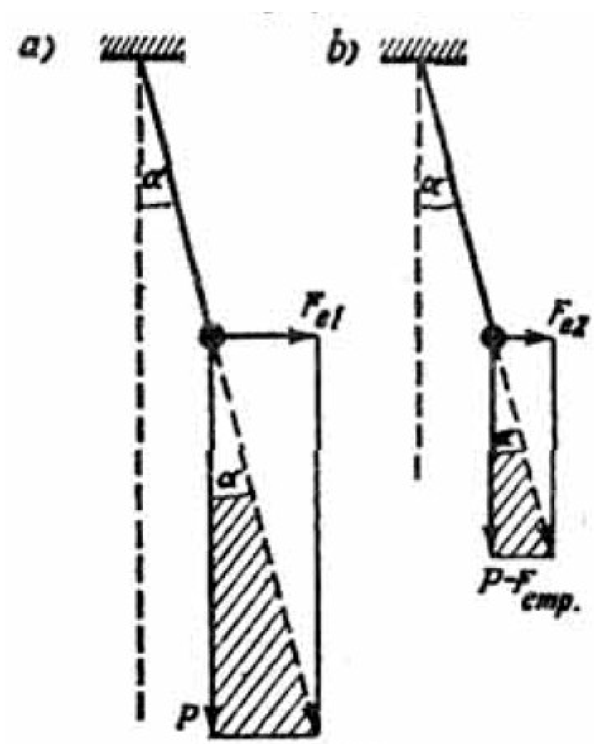


Figura 101.

De aquí se concluye que

$$F_{\varepsilon 1}/P = \text{tg}\ \alpha$$

donde α es el ángulo entre la dirección del hilo y la vertical cuando las esferitas son introducidas en el dieléctrico, en lugar de la fuerza $F_{\varepsilon 1}$ hay que colocar la fuerza $F_{\varepsilon 2}$ y en lugar del peso P, la diferencia ($P — F_{emp}$) donde F_{emp} es la fuerza de empuje. Sin embargo, la razón entre las nuevas fuerzas debe ser otra vez igual a la tg α (figura 101, b):

$$F_{\varepsilon 2}/(P — F_{emp}) = \text{tg}\ \alpha$$

utilizando las dos últimas igualdades, obtenemos

$$F_{\varepsilon 1}/P = F_{\varepsilon 2}/(P — F_{emp})$$

Colocando aquí el resultado (160) y teniendo en cuenta que $P = Vg\rho$ y $F_{emp} = Vg\rho_0$ hallamos

$$\varepsilon/\rho = 1/(\rho - \rho_0)$$

de donde la densidad que buscamos es

$$\rho = \rho_0\varepsilon/(\varepsilon — 1) \qquad (161)$$

PROFESOR: Su respuesta es correcta. Problema 3. *Dos esferitas iguales cargadas de masa m, están suspendidas de un mismo punto de hilos, cada uno de longitud l. En el punto de suspensión se encuentra una tercera esferita, también cargada, como las dos primeras (figura 102). Calcular la carga q de la esfera, si el ángulo entre los hilos en su posición de equilibrio es igual a* α.

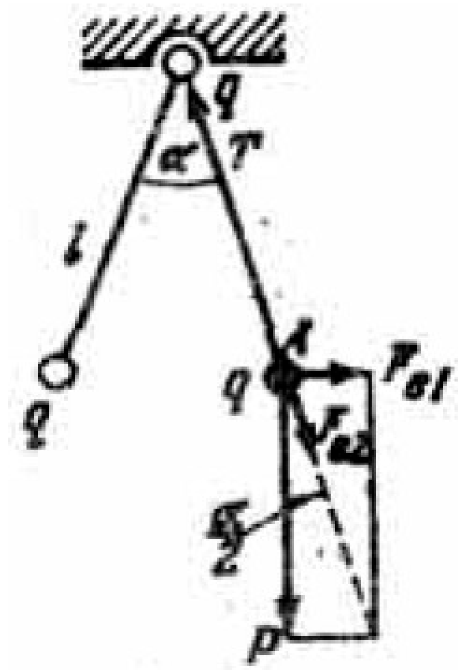


Figura 102.

ESTUDIANTE B: Veamos la esferita A. Sobre ésta están aplicadas cuatro fuerzas, indicadas en la figura 102. Puesto que la esfera se encuentra en equilibrio, descompongo estas fuerzas en dos direcciones...

PROFESOR (interrumpiendo): En este caso se puede obrar de una manera más sencilla. La fuerza, por parte de la carga que se encuentra en el punto de suspensión, no ejerce ninguna influencia sobre la posición de equilibrio del hilo: la fuerza $F_{\varepsilon 2}$ actúa a lo largo del hilo, y en cualquier posición se equilibra con la reacción del hilo. Por esto, el problema considerado se puede analizar como si la carga colocada en el punto de suspensión no existiera. Por lo general, esto no lo comprenden los examinandos.

ESTUDIANTE B: En tal caso no tendremos en cuenta a la fuerza $F_{\varepsilon 2}$. Puesto que la suma vectorial de las fuerzas $F_{\varepsilon 1}$ y P debe estar dirigida a lo largo del hilo, obtenemos

$$F_{\varepsilon 1}/P = \mathrm{tg}\ (\alpha/2) \qquad (162)$$

PROFESOR: Fíjense que el resultado (162) no depende de la presencia o ausencia. de carga en el punto de suspensión.

ESTUDIANTE B: Puesto que

$$F_{\varepsilon 1} = \frac{q^2}{4l^2 sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

de la igualdad (162) obtenemos

$$\frac{q^2}{4l^2\ mg\ sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

De aquí, llegamos al resultado que buscamos

$$q = 2l\ sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{mg\ tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (163)$$

PROFESOR: Este resultado es correcto.

ESTUDIANTE A: ¿Y en qué caso la presencia de una carga en el punto de suspensión debe ser tomada en cuenta?

PROFESOR: Cuando se trate, por ejemplo, de encontrar la tensión del hilo.

PROBLEMAS

50. En los vértices de un hexágono regular se colocan cargas eléctricas iguales de valor +q. ¿Qué carga habrá que colocar en el centro del hexágono, para que todo este sistema de cargas permanezca en equilibrio?

51. Una esferita de masa m y de carga q que está suspendida de un hilo de longitud l, gira alrededor de una carga inmóvil, igual a la carga de la esferita (figura 103); α es el ángulo que forma la dirección del hilo con la vertical. Encontrar la velocidad angular, con la cual la esfera gira uniformemente, y la tensión del hilo.

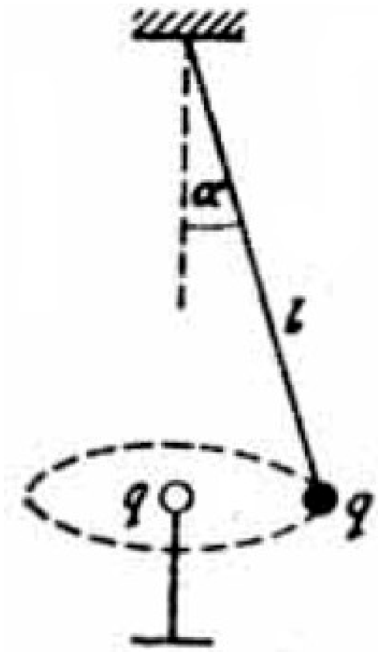
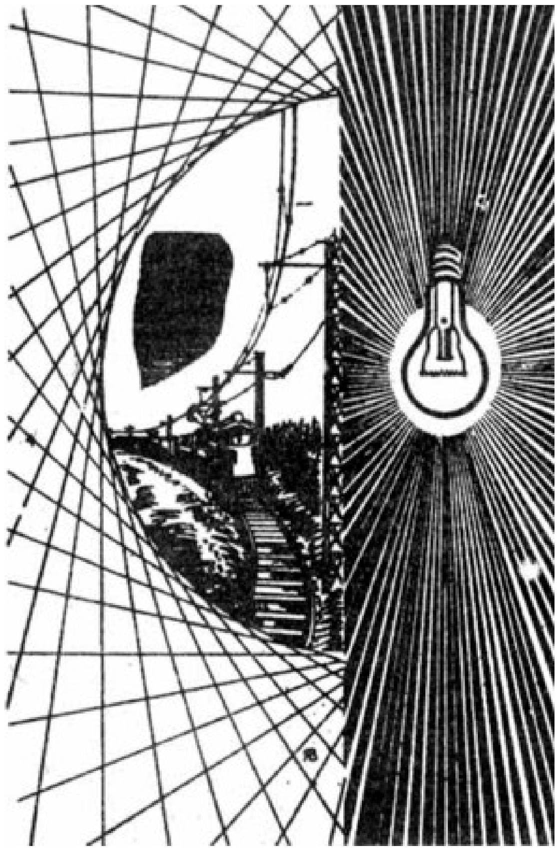


Figura 103.

Una esferita de masa m y carga q puede girar en el plano vertical suspendida de un hilo de longitud l. En el centro de giro se encuentra una segunda esferita. cuya carga es igual en valor y en signo a la carga de la esferita que gira. ¿Cuál es la velocidad horizontal mínima que hay que comunicarle a la esferita en su posición más baja para que pueda realizar una vuelta completa?

Capítulo 11



La corriente eléctrica ha penetrado de tal manera en nuestra vida cotidiana que sobra hacer hincapié en la importancia de las leyes de Ohm y de Joule — Lentz. Sin embargo, ¿saben ustedes bien estas leyes?

§ 27. ¿CONOCE USTED LA LEY DE OHM?

PROFESOR: ¿Conoce usted la ley de Ohm?

ESTUDIANTE A: Si, por supuesto. Me imagino que la ley de Ohm la conocen todos y supongo que es la pregunta más fácil de todo el curso de Física.

PROFESOR: Comprobémoslo. En la figura 104 a, está representado un sector de un circuito eléctrico, donde E es la fuerza electromotriz que está dirigida hacia la derecha; R_1 y R_2 son resistencias, r es la resistencia interna de la fuente de la f.e.m.; φ_A y φ_B son los potenciales en los extremos del sector del circuito que estamos considerando. El sentido de la corriente en el sector es de la izquierda hacia la derecha. Se pide encontrar la intensidad I de dicha corriente.

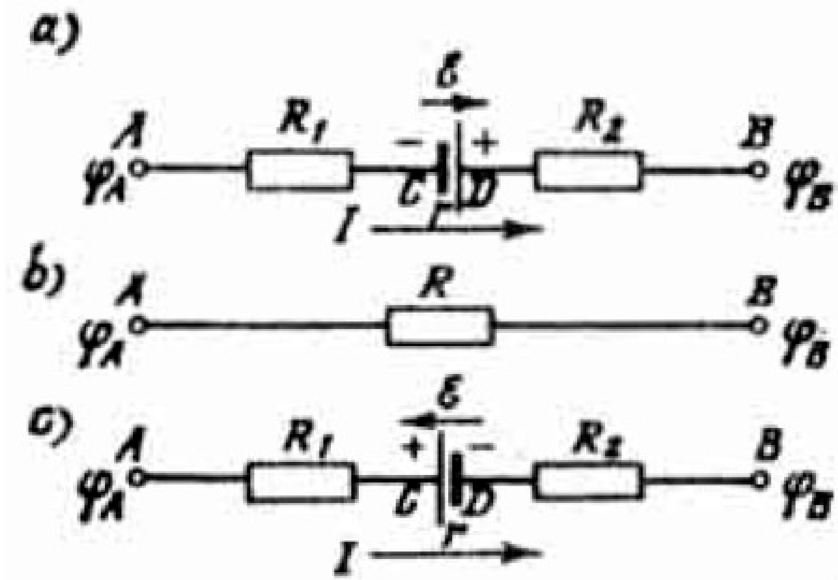


Figura 104.

ESTUDIANTE A: ¡Pero si el circuito está abierto!

PROFESOR: Yo le propuse que considerara un sector de un circuito completo. Usted no necesita conocer todo el circuito, por cuanto están dados los potenciales en los extremos de la rama considerada.

ESTUDIANTE A: Nosotros anteriormente hemos tratado solamente con circuitos eléctricos cerrados. Para éstos la ley de Ohm tiene la siguiente forma

$$I = E/(R + r) \qquad (134)$$

PROFESOR: Usted está equivocado. Usted también tuvo que analizar un sector de un circuito. Según la ley de Ohm para el sector de un circuito la corriente es igual a la razón entre el voltaje y la resistencia.

ESTUDIANTE A: Pero, ¿acaso esto es un sector de un circuito?

PROFESOR: Por supuesto. Para el sector representado en la figura 104 b, usted puede escribir la ley de Ohm en la forma

$$I = (\varphi_A - \varphi_B)/R \qquad (165)$$

en este caso, en lugar de la diferencia de potencial entre los extremos de la rama usted antes ha utilizado un término más sencillo «voltaje» y lo representaba por medio de la letra V.

ESTUDIANTE A: Sin embargo, nosotros no analizamos un sector como el de la figura 104 a.

PROFESOR: Bien, aceptamos que usted conoce la ley de Ohm para los casos particulares de un circuito cerrado y de un sector simple, sin fuente de la f.e.m. Sin embargo, usted no conoce la ley de Ohm para el caso general. Hagamos un análisis en conjunto. La figura 105 a, indica la variación del potencial a lo largo de un sector dado de un circuito. La corriente circula de la izquierda hacia la derecha, por lo tanto de A hasta C el potencial disminuye. La caída del potencial en la resistencia R_1 es igual a IR_1. Luego supongamos, que en los puntos C y D se encuentran los bornes de una pila. En estos puntos hay un salto del potencial. La suma de estos saltos es el valor de la f.e.m. que es igual a E. Entre C y D el potencial cae en la resistencia interna de la batería; esta caída del potencial es, igual a Ir. Finalmente, de D a B, el potencial cae en la resistencia R_2, dicha caída del potencial es igual a IR_2. La suma de las caídas del potencial en todas las resistencias del sector menos el salto del potencial, igual a V, es la diferencia del potencial entre los terminales del sector considerado del circuito:

$$I(R_1 + R_2 + r) - E = \varphi_A - \varphi_B$$

De ahí, obtenemos la expresión para la corriente, es decir, la ley de Ohm para el sector dado del circuito

$$I = \frac{E + (\varphi_A - \varphi_B)}{R_1 + R_2 + r} \qquad (166)$$

Observe que de este resultado podemos obtener en seguida los casos particulares que usted conoce. Para el sector mas simple sin la f.e.m. es necesario colocar en (166): E = 0, r = 0. Entonces obtenemos

$$I = (\varphi_A - \varphi_B)/(R_1 + R_2)$$

lo que corresponde a la formula (165). Para un circuito cerrado los terminales A y B de nuestro sector deben estar unidos. Esto significa que $\varphi_A = \varphi_B$. De aquí obtenemos

$$I = E/(R_1 + R_2 + r)$$

lo cual corresponde a la fórmula (164).

ESTUDIANTE A: Si, me he dado cuenta que no sabía la ley de Ohm.

PROFESOR: Para hablar más precisamente, usted la sabía para casos particulares. Supongamos que a los bornes del elemento del sector del circuito representado en la figura 104 a, conectamos un voltímetro. Vamos a suponer que dicho voltímetro tiene una resistencia suficientemente grande, de tal manera que se puede despreciar las distorsiones, relacionadas con la conexión del voltímetro. ¿Qué indicará el voltímetro?

ESTUDIANTE A: Yo sé que un voltímetro conectado a los bornes de un elemento, debe indicar la caída del voltaje en el circuito externo. Sin embargo, en el caso dado no conocemos el circuito externo.

PROFESOR: Es posible saberlo sin necesidad de conocer el circuito externo. Si el voltímetro está conectado a los puntos C y D, indicará la diferencia de potencial entre estos puntos. Esto es necesario suponerlo. ¿Usted ha comprendido?

ESTUDIANTE A: Si, por supuesto.

PROFESOR: Ahora, fíjese en la figura 105 a. De ésta se puede ver que la diferencia de potencial entre los puntos C y D es igual a (E — Ir). Si llamamos V a la magnitud indicada por el voltímetro, obtenemos la fórmula

$$V = E - Ir \qquad (167)$$

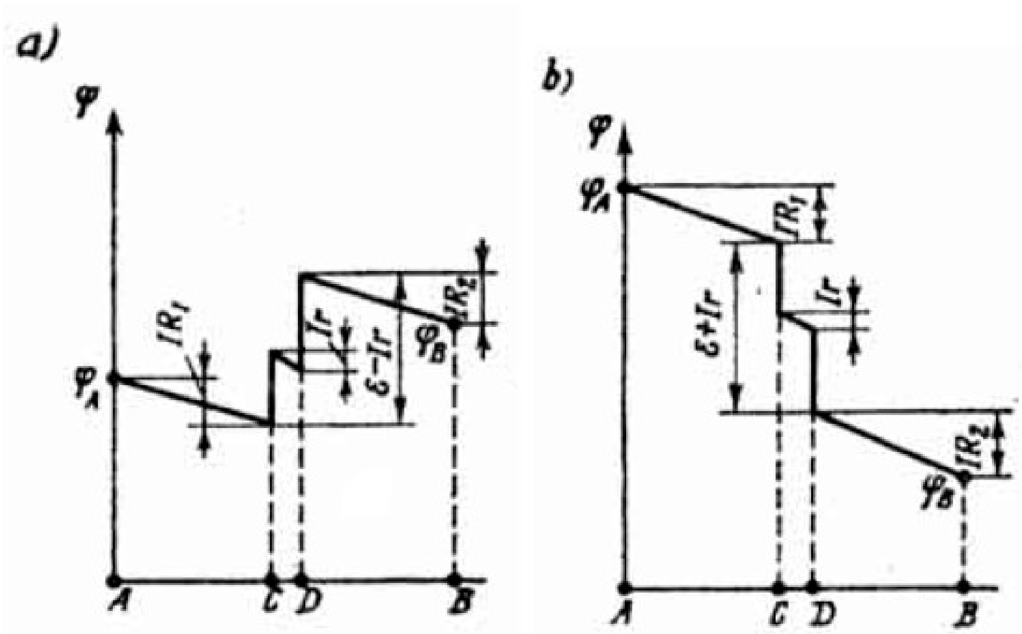


Figura 105.

Le aconsejo utilizar precisamente esta fórmula, ya que aquí no es necesario saber las resistencias externas. Esto es valioso especialmente en el caso de circuitos más complicados. Observemos que de (167) se deduce el resultado particular conocido: si el circuito está abierto y, por lo tanto, la corriente no circula (I = 0), entonces V = E. En este caso la indicación del voltímetro coincide con el valor de la f.e.m.

¿Entiende usted esto?

ESTUDIANTE A: Si, ahora entiendo.

PROFESOR: En calidad, de prueba, le formulo la siguiente pregunta, a la cual difícilmente dan respuesta los examinandos. *Un circuito cerrado consta de n fuentes de la f.e.m. igual a E y de resistencias internas iguales a r, conectadas en serie. La resistencia de los alambres conductores se considera igual a cero. ¿Qué indicará un voltímetro, conectado a los bornes de una de las fuentes? Como de costumbre, se supone que a través del voltímetro no pasa corriente.*

ESTUDIANTE A: Procederé de acuerdo a la explicación anterior. El voltímetro indicará V = E — Ir. En base a la ley de Ohm para el circuito cerrado que estamos considerando encontramos la intensidad de la corriente I = (nE)/(nr) = E/r. Utilizando este resultado, obtenemos V = E — (E/r)r =0. De tal manera que en el caso dado, el voltímetro no indicará nada.

PROFESOR: Exactamente. Recuerde únicamente que este resultado ha sido idealizado: por una parte, hemos despreciado la resistencia de los alambres conductores y por otra parte, hemos supuesto que la resistencia del voltímetro es infinitamente grande; de tal manera que no trate de comprobar experimentalmente este resultado. Veamos el caso, cuando la corriente en un sector del circuito y la f.e.m. del sector están dirigidas en sentidos contrarios y no en un mismo sentido. Este caso está representado en la figura 104 c. Represente la variación del potencial a lo largo de dicho sector.

ESTUDIANTE A: ¿Y es acaso posible que la corriente circule en sentido contrario al de la f.e.m.?

PROFESOR: Usted olvida, que aquí se trata solamente de un sector del circuito. En este circuito puede haber otras f.e.m., que no pertenecen al sector considerado, y debido a las cuales el sentido de la corriente que circula a lo largo de dicho sector puede ser contrario al sentido de la f.e.m. dada.

ESTUDIANTE A: Entendido. Puesto que la corriente fluye de la izquierda hacia la derecha, de A hasta C, el potencial cae en un valor igual a IR_1. Como ahora la f.e.m. está dirigida en otro sentido, los saltos del potencial en los puntos C y D no deben entonces aumentar, sino por el contrario, disminuir el potencial. Del punto C al punto D el potencial cae en un valor igual a Ir; del punto D al punto B, en un valor IR_2. Como consecuencia, llegamos a la gráfica representada en la figura 105 b.

PROFESOR: Entonces, ¿cómo debemos ahora escribir la ley de Ohm?

ESTUDIANTE A: La ley de Ohm tendrá la forma

$$I = \frac{(\varphi_A - \varphi_B) - E}{R_1 + R_2 + r} \qquad (168)$$

PROFESOR: Correcto. ¿Cómo escribimos ahora la indicación del voltímetro?

ESTUDIANTE A: De la figura 105 b, podemos ver que en este caso

$$V = E + Ir \qquad (169)$$

PROFESOR: Exactamente. Veamos el siguiente problema. *Sea el circuito eléctrico, representado en la figura 106. Están dados: r = 1 ohm, R = 10 ohm, la resistencia del voltímetro R_v = 200 ohm.*

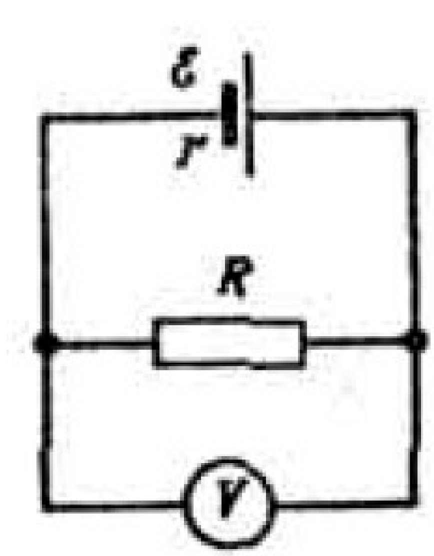


Figura 106.

Calcular el error relativo de las indicaciones del voltímetro, el cual se obtiene al suponer que el voltímetro tiene una resistencia infinitamente grande y que, por lo tamo, no introduce ninguna distorsión en el circuito dado.

Llamemos V a la indicación del voltímetro real y V_∞, a la indicación del voltímetro de resistencia infinitamente grande. El error relativo que buscamos es

$$f = \frac{V_\infty - V}{V_\infty} = \left(1 - \frac{V}{V_\infty}\right) \qquad (170)$$

Luego, teniendo en cuenta que

$$V_\infty = \frac{E}{R+r} R \qquad (172)$$

$$V = \frac{E}{r + \frac{RR_V}{R+R_V}} \frac{RR_V}{R+R_V} \qquad (173)$$

Al colocar las fórmulas (171) y (172) en (170), obtenemos

$$f = 1 - \frac{R_V(R+r)}{(R+R_V)r + RR_V} = 1 - \frac{R_V(R+r)}{(r+R)R_V + rR} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{rR}{(r+R)R_V}}$$

Puesto que $R_v \gg R$ y $R > r$. la fracción que figura en el denominador de la última igualdad es mucho menor que la unidad. Por lo tanto, se puede utilizar una fórmula aproximada, la cual es muy conveniente tenerla en cuenta siempre,

$$(1 + \lambda)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\lambda \qquad (173)$$

cuando $\lambda \ll 1$ esta fórmula es válida para cualquier α (entero o fraccionario, positivo o negativo). Utilizando la fórmula aproximada (173) y haciendo α = —1 y $\lambda = rR\cdot(r+R)^{-1}\cdot R_v^{-1}$ obtenemos

$$f \approx \frac{rR}{(r+R)R_V} \qquad (174)$$

Colocando en la fórmula (174) los valores numéricos de las magnitudes, dados en los datos del problema, obtenemos que el error buscado es $f \approx 1/220 = 0{,}0045$.

ESTUDIANTE A: Es decir. ¿cuánto mayor sea la resistencia del voltímetro comparada con la resistencia externa, menor será el error indicado? O sea, ¿con mayor razón se puede despreciar la distorsión del circuito al conectar el voltímetro?

PROFESOR: Si, así es. Es necesario solamente tener en cuenta que la condición $R \ll R_v$ es una condición suficiente, pero no necesaria para que el error f sea pequeño. En (174) vemos que el error es también pequeño en el caso, cuando se cumple la condición $r \ll R_v$ es decir, cuando la resistencia del voltímetro es mucho mayor que la resistencia interna de la fuente de corriente. En este caso la resistencia externa puede ser tan grande como se quiera.

Problema. *En el circuito eléctrico representado en la figura 107, se conocen: E = 6 V, r = 2/3 ohm, R = 2 ohm. Calcular la indicación del voltímetro.*

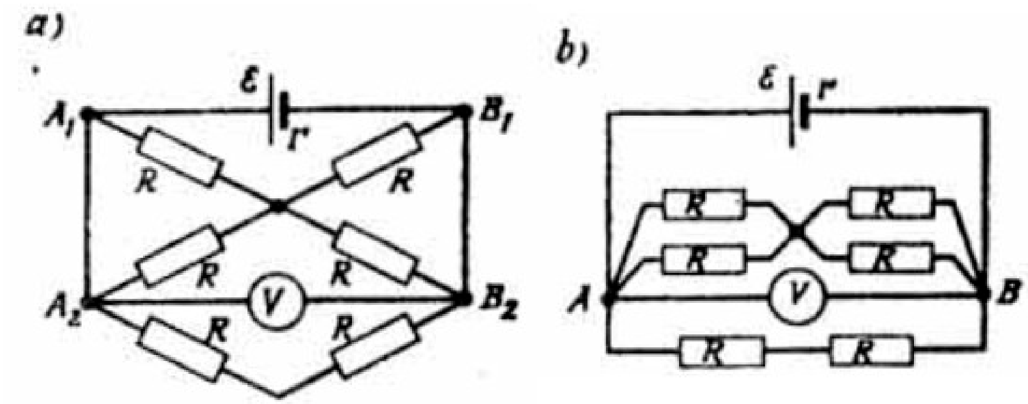


Figura 107.

ESTUDIANTE A: ¿La resistencia del voltímetro se puede considerar infinitamente grande?

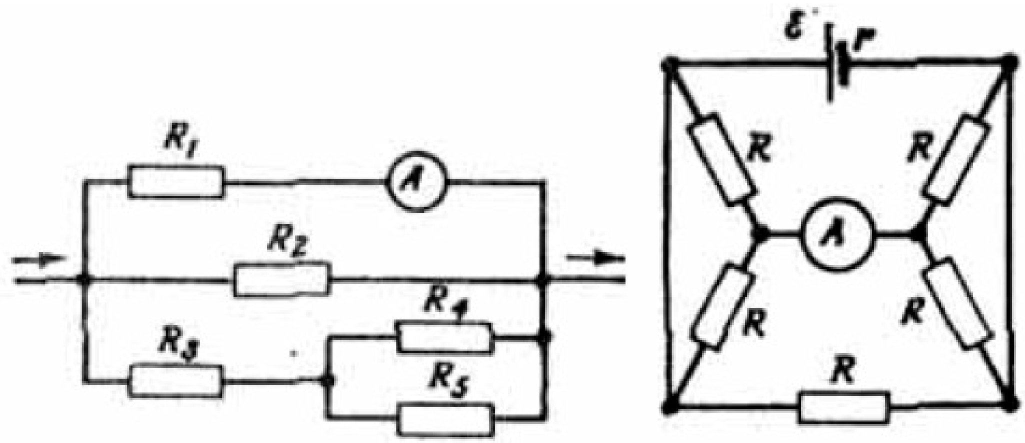
PROFESOR: Sí, con mayor razón si dicha resistencia no está dada en el enunciado. Además se desprecia la resistencia de los alambres.

ESTUDIANTE A: ¿Pero entonces, seguramente no circulará corriente por las resistencias de la parte central del esquema, sino que fluirá directamente a lo largo de las ramas A_1A_2 y B_1B_2?

PROFESOR: Está equivocado. Antes de analizar las corrientes yo le aconsejaría simplificar un poco el esquema. Puesto que los sectores A_1A_2 y B_1B_2 no tienen resistencia, concluimos que ($\varphi A_1 = \varphi A_2$ y $\varphi B_1 = \varphi B_2$). Luego, se puede utilizar la siguiente regla: si en un esquema dos puntos cualesquiera están al mismo potencial, estos dos puntos se puede reducir a un solo, sin que varíen las corrientes a través de las resistencias. Utilicemos esta regla en el caso considerado: juntemos el punto A_1 con el punto A_2 y el punto B_1 con el punto B_2. Después de esta, obtenemos el esquema, representado en la figura 107 b, el cual no es difícil de analizar. Por lo tanto, les daré de una vez la respuesta final: el voltímetro indica 4 V. Les dejo para que ustedes mismos, en sus ratos libres, hagan los cómputos correspondientes.

PROBLEMAS

53. Un amperímetro está conectado a una rama de un circuito (figura 108) e indica 0,5 A. Encontrar la intensidad de la corriente que pasa a través de la resistencia R_4, si se conocen: R_1 = 2 ohm, R_2 = 4 ohm, R_3 = 1 ohm, R_4 = 2 ohm, R_5 = 1 ohm.



Figuras 108 y 109

54. En el circuito eléctrico, representado en la figura 109, se conoce: E = 9 V, r = 1 ohm, y R = 2 ohm. Determinar la indicación del amperímetro.

55. La resistencia de un galvanómetro es igual a 0,2 ohm. Paralelamente a éste se conecta una resistencia en derivación igual a 0,05 ohm. ¿Cuál es la resistencia complementaria que hay que conectar en serie con esta combinación, para obtener una resistencia total igual a la resistencia del galvanómetro?

56. A los bornes de una fuente de la f.e.m. de 10 V y de una resistencia interna de 1 ohm, se conecta un voltímetro de 100 ohm de resistencia. Determinar la indicación del voltímetro y calcular el error relativo de su indicación, obtenido cuando se supone que el voltímetro tiene una resistencia infinita.

57. A un circuito con una resistencia externa de 49 ohm y con una fuente de corriente cuya f.e.m. es igual a 10 V y su resistencia interna igual a 1 ohm, se conecta un amperímetro de 1 ohm de resistencia. Determinar la indicación del amperímetro y calcular el error relativo de las indicaciones del amperímetro cuando se supone que éste no tiene resistencia.

§ 28. ¿SE PUEDE CONECTAR UN CONDENSADOR A UN CIRCUITO DE CORRIENTE CONTINUA?

PROFESOR: Veamos el siguiente problema. *Sea el circuito, representado en la figura 110, donde C es la capacidad del condensador. Se pide encontrar la carga Q en las armaduras del condensador, si la f.e.m. de la fuente de corriente es igual a E y su resistencia interna igual a r.*

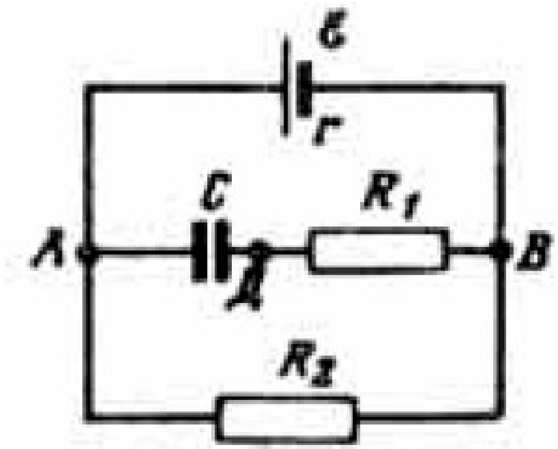


Figura 110.

ESTUDIANTE A: Pero, ¿es posible conectar un condensador a un circuito de corriente continua? Pues, de todas maneras no circulará corriente a través de éste.

PROFESOR: No importa que no circule a través del condensador, puesto que a través de las ramas paralelas pasará corriente.

ESTUDIANTE A: Me parece que he entendido. Puesto que en el esquema de la Figura 110 no circula corriente a través del condensador, tampoco circulará por la resistencia R_1. En la parte exterior del circuito la corriente circulará solamente a través de la resistencia R_2. La intensidad de la corriente la determinamos a partir de la relación $I = E/(R_2 + r)$, entonces la diferencia de potencial entre los puntos A y B es igual a la calda de voltaje en la resistencia R_2, es decir,

$$\varphi_B — \varphi_A = IR_2 = ER_2/(R_2 + r) \quad (175)$$

No sé qué debo hacer después de esto. Para encontrar la carga en las armaduras del condensador, debo saber cuál es la diferencia de potencial entre los puntos A y B.

PROFESOR: Usted ha deducido correctamente que por la resistencia R_1 no pasa corriente. Entonces, en tal caso todos los puntos de esta resistencia deben estar al mismo potencial (recuerde la discusión del § 24), Es decir, $\varphi_B = \varphi_A$. De donde, utilizando (175), obtenemos el resultado deseado

$$Q = CER_2/(R_2 + r) \qquad (176)$$

Ahora analicemos el siguiente problema. *En el circuito eléctrico, representado en la figura 111, están dados: E = 4 V, r = 1 ohm, R_1 = 3 ohm, R_2 = 2 ohm; C_1=2 μf, C_2 = 8 μf, C_3 = 4 μf, C_4 = 6 μf. Encontrar la carga en las armaduras de cada condensador.*

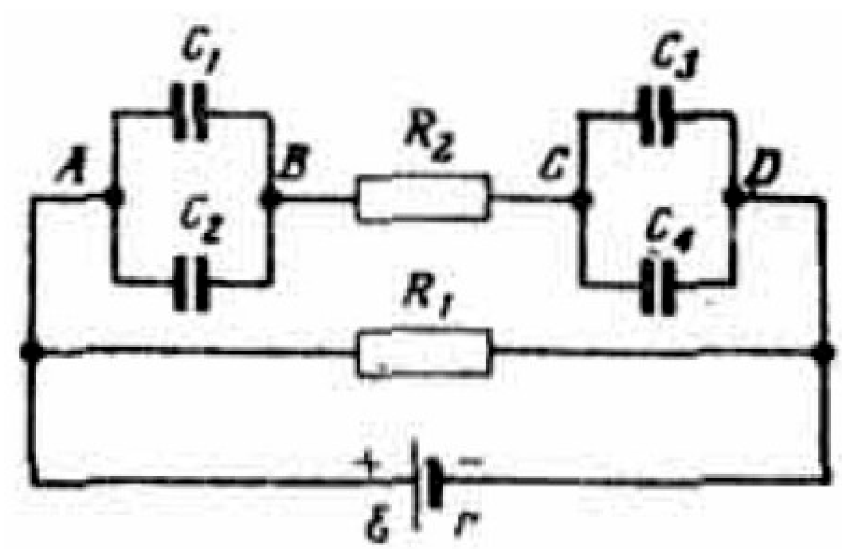


Figura 111.

Respecto a esto, usted recuerde las reglas para la suma de capacidades cuando éstas están conectadas en paralelo y en serie.

ESTUDIANTE A: Si, recuerdo. Cuando los condensadores están conectados en paralelo. sus capacidades se suman, o sea,

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \qquad (177)$$

mientras que si lo están en serie se suman las magnitudes inversas de las capacidades,

$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3... \qquad (178)$$

PROFESOR: Utilizando la regla (177). encontramos la capacidad entre. los puntos A y B:

$$C_{AB} = 2\mu f + 8\ \mu f = 10\ \mu f$$

lo mismo que entre los puntos C y D:

$$C_{cd} = 4\mu f + 6\ \mu f = 10\ \mu f$$

La diferencia de potencial entre los puntos A y D la hallamos como la caída de voltaje en la resistencia R_1

$$\varphi_D - \varphi_A = IR_1 = ER_1/(R_1 + r) = 3V$$

Es evidente que aquí la resistencia R_1 no juega ningún papel y no es necesario tenerla en cuenta. Puesto que $C_{AB} = C_{cd}$, entonces

$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi_D - \varphi_C = (3V)/2 = 1,5\ V$$

Luego encontramos las cargas que buscamos:

$$Q_1 = C_1(\varphi_B - \varphi_A) = 3\mu C$$

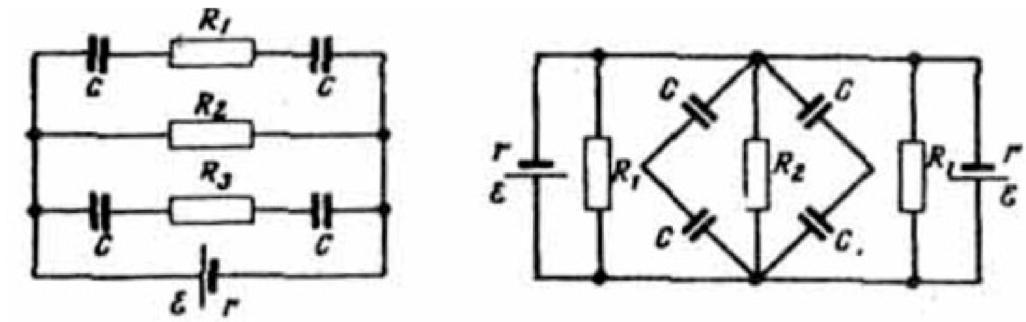
$$Q_2 = C_2(\varphi_B - \varphi_A) = 12\mu C$$

$$Q_3 = C_3(\varphi_D - \varphi_C) = 6\mu C$$

$$Q_4 = C_4(\varphi_D - \varphi_C) = 9\mu C$$

PROBLEMAS

En el circuito eléctrico de la figura 112, están dados: E =5 V, r = 1 ohm, R_2 = 4 ohm, R_3 = 3 ohm, C=3 μf. Encontrar la carga en las láminas de cada condensador.



Figuras 112 y 113.

59. Sea el circuito eléctrico representado en la figura 113, suponiendo conocidas todas las magnitudes indicadas en la figura, encontrar la carga en las láminas de cada condensador.

60. Un condensador plano cuyas láminas tienen una longitud l, está conectado como se indica en la figura 114.

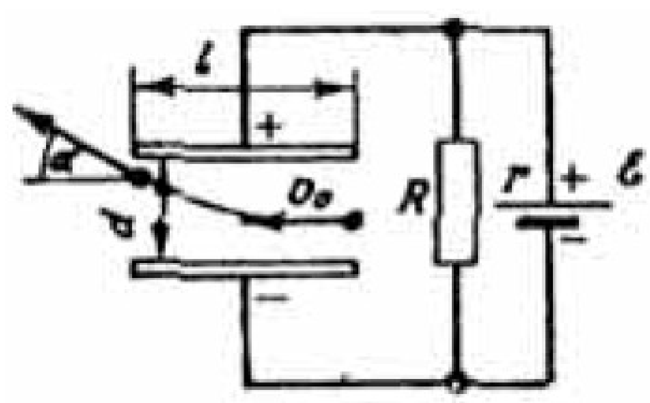
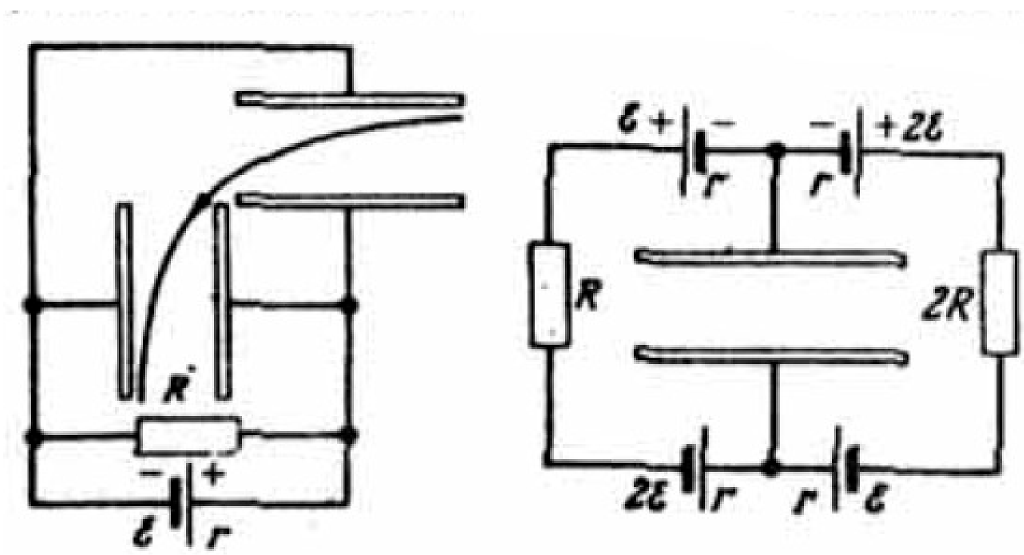


Figura 114.

Se conocen la f.e.m. de la fuente de corriente E, su resistencia interna r y la distancia entre las láminas d. En el condensador paralelamente a sus láminas penetra un electrón con una velocidad v_0. ¿Qué resistencia R en paralelo habría que conectar al condensador para que el electrón salga de éste formando un ángulo α con las láminas? La masa m y la carga y del electrón se suponen conocidas.

61. En el circuito, representado en la figura 115, están conectados dos condensadores planos iguales cuyas láminas tienen una longitud igual a l y separadas una distancia d.



Figuras 115 y 116.

Los condensadores están orientados perpendicularmente el uno con relación al otro. Se conocen la f.e.m. E de la fuente de corriente y su resistencia interna r. Encontrar la resistencia R necesaria, para que un electrón, que penetra en uno de los condensadores paralelamente a sus láminas con una velocidad u., alcance luego al segundo condensador y salga de éste paralelamente a sus láminas. La masa m y la carga q del electrón se consideran conocidas.

62. Un condensador plano cuyas láminas tienen una longitud está conectado a un circuito, como se indica en la figura 116 (la f.e.m. E y las resistencias R y r son conocidas). En el condensador penetra un electrón con una velocidad v, paralela a las láminas. ¿Bajo qué ángulo con relación a las láminas sale el electrón del condensador? Se suponen conocidas la masa en y la carga q del electrón.

§ 29 ¿SABE USTED CALCULAR LA RESISTENCIA DEL SECTOR RAMIFICADO EN CIRCUITO?

PROFESOR: Calcule la resistencia del sector, representado en la figura 117 a. Se puede despreciar la resistencia de los cables o alambres conductores.

ESTUDIANTE A: Si se puede despreciar la resistencia de los cables, entonces no es necesario en absoluto tenerlos en cuenta. Por lo tanto, la resistencia del sector es igual a 3R.

PROFESOR: Usted ha respondido sin pensar. Despreciar la resistencia de los cables y despreciar a los cables son dos cosas completamente diferentes (aunque algunos examinandos suponen que es lo mismo). Excluir de un esquema un alambre conductor cualquiera, significa cambiar dicho cable por una resistencia infinitamente grande. Aquí por el contrario, la resistencia de los alambres es igual a cero.

ESTUDIANTE A: Si, es verdad, sencillamente no lo pensé bien. Razonaré de la siguiente manera. En el punto A la corriente se ramifica en dos, cuyas direcciones indiqué en la figura 117 b por medio de flechas. En este caso, la resistencia del centro no se tiene en cuenta, de tal manera que la resistencia total equivalente de sector resulta igual a R/2.

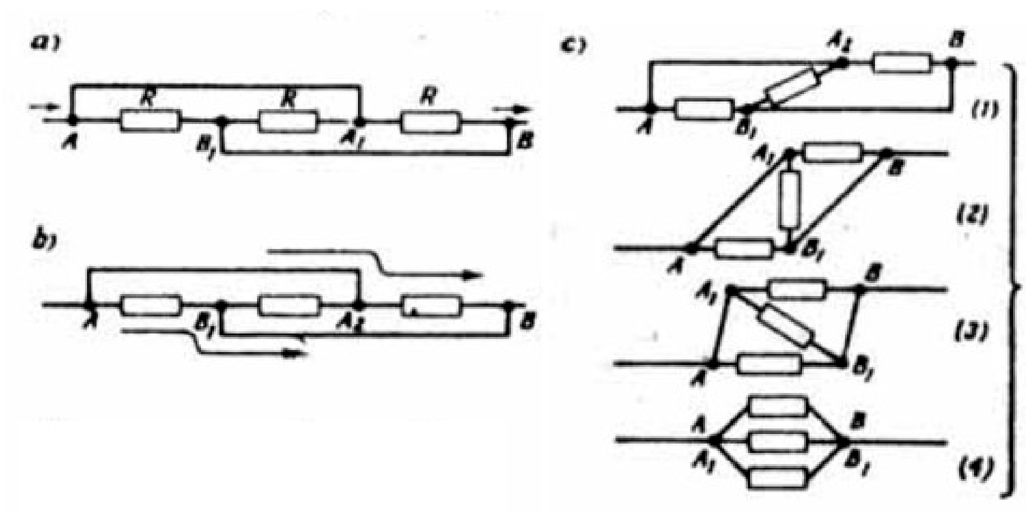


Figura 117.

PROFESOR: Su segunda respuesta tampoco es correcta. Le aconsejo utilizar la siguiente regla: encuentre en el esquema los puntos que estén a un mismo potencial y haga de tal manera que estos puntos coincidan. Entonces las corrientes en las distintas ramas se quedan igual, mientras que el sistema mismo se puede simplificar considerablemente. Acerca de esto yo les indiqué en el § 27, puesto que en el problema dado las resistencias de los alambres son iguales a cero, los puntos A y A_1 tienen el mismo potencial. De la misma manera los puntos B y B_1 tienen el mismo potencial. De acuerdo con la regla indicada arriba variaremos en circuito de tal manera que los puntas de igual potencial, Finalmente coincidan. Para esto, vamos a acortar consecutivamente la longitud de los cables conductores. Las etapas consecutivas de esta operación se indican en la figura 117 c. Como resultado de esto, encontramos que el sector dado coincide con la conexión en paralelo de las tres resistencias de tal manera que la resistencia equivalente. del sector es igual a R/3.

ESTUDIANTE A: Si, realmente. En la figura 117 c, se ve claramente que es una conexión en paralelo.

PROFESOR: Pasemos al siguiente ejemplo. *Nos dan un cubo formado por cables, cada uno de los cuales tiene una resistencia R (figura 118 a).*

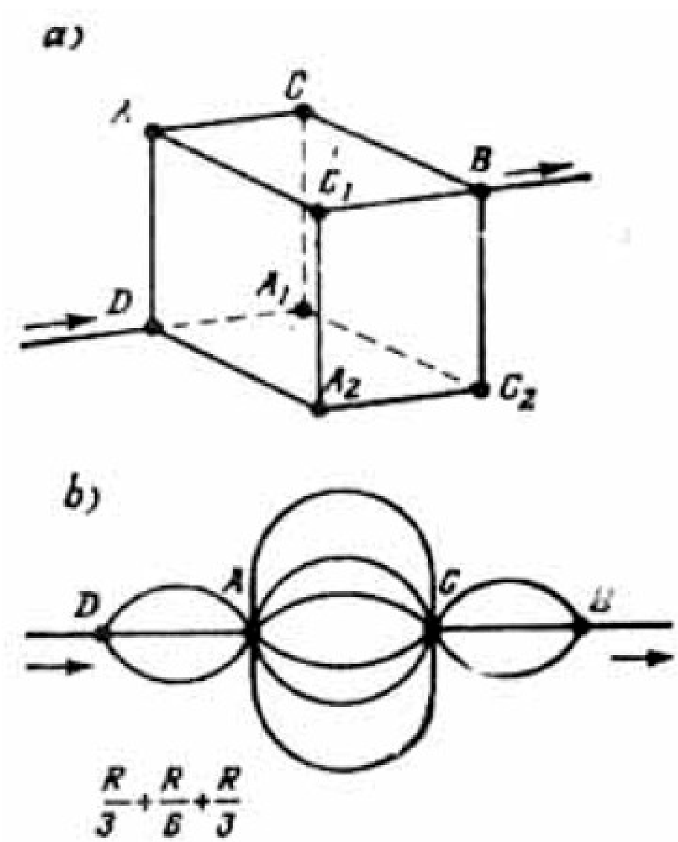


Figura 118.

Este cubo se conecta a un circuito como se indica en la figura. Calcular la resistencia total del cubo.

Utilicemos la regla indicada atrás. Señale los puntos que se encuentran a igual potencial.

ESTUDIANTE A: Yo creo que tendrán el mismo potencial los puntos A, A_1, A_2 (ver figura 118 a), puesto que las tres aristas del cubo (DA, DA_1, DA_2) son completamente equivalentes.

PROFESOR: Es cierto, de igual manera son equivalentes las aristas BC, BC_1, BC_2. Por consiguiente, los puntos B, B_1, B_2. también tendrán igual potencial. Luego, rompamos el cubo de alambre, en todos los puntos indicados, doblemos los cables de cada arista y unámoslos de tal manera que los puntos con igual potencial coincidan. ¿Qué figura obtenemos entonces?

ESTUDIANTE A: Se obtiene la figura representada en la figura 118 b.

PROFESOR: Exactamente. En la figura 118 b, se obtiene un esquema equivalente al esquema inicial (el cubo), pero ahora mucho más sencillo. Después de esto es fácil calcular la resistencia total que buscamos.

ESTUDIANTE A: Esta es igual a

$$(1/3)R + (1/6)R + (1/3)R = (5/6)R$$

ESTUDIANTE B: ¿Cómo encontrar la resistencia total de la figura hecha con alambres de un cuadrado con sus diagonales, conectada a un circuito, como se indica en la figura 119 a?

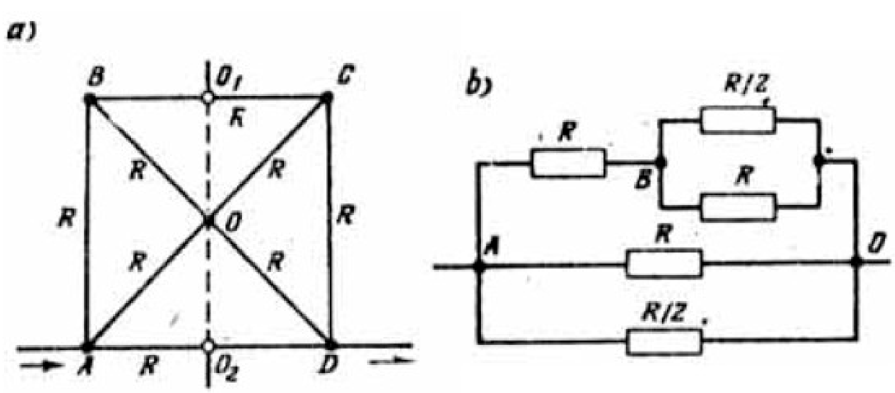


Figura 119.

PROFESOR: Hay que encontrar los puntos de igual potencial. En el caso dado es fácil observar que el esquema posee un eje de simetría. Yo lo represento en la figura 119 a, por medio de una línea punteada. Claramente que todos los puntos, que descansan sobre el eje de simetría, deben tener el mismo potencial, igual a la semisuma de los potenciales de los puntos A y D. De esta manera, los. potenciales de los puntos O, O_1, O_2 son iguales. De acuerdo con la regla conocida, estos tres puntos se pueden unir en uno solo y, como resultado de esto, la combinación de resistencias considerada se descompone en dos sectores iguales unidos en serie, uno de los cuales está indicado en la figura 119 b. La resistencia de dicho sector no es difícil determinar. Si cada uno de los alambres del cuadrado tiene la misma resistencia R, obtenemos que el sector considerado debe tener una resistencia igual a (4/15)R. De esta manera, la resistencia que se busca resulta igual a (8/15)R.

ESTUDIANTE A: Es decir, ¿la regla fundamental consiste en buscar en el esquema los puntos de igual potencial y luego simplificar dicho esquema reduciendo todos estos puntos a uno solo?

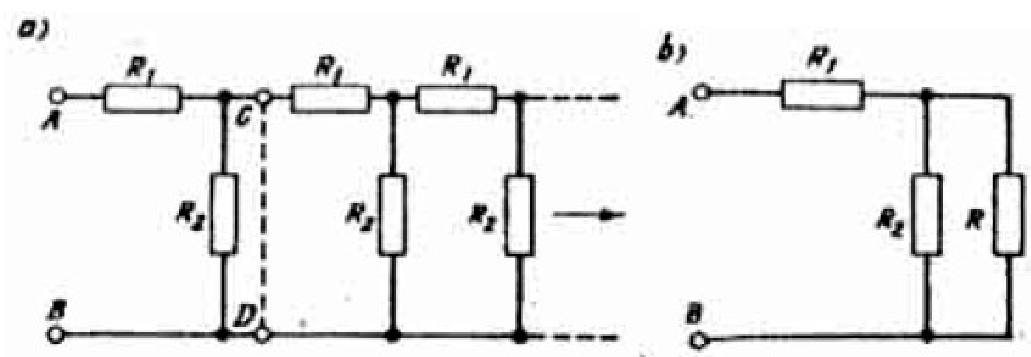


Figura 120.

PROFESOR: Precisamente así. Para concluir, quiero sugerirles un ejemplo con un sector infinito. *Sea dado un circuito, compuesta de un número infinito de secciones can resistencias* R_1 *y* R_2*, que se repiten (figura 120 a). Se pide encontrar la resistencia equivalente entre los puntos A y B.*

ESTUDIANTE A: ¿Tal vez aquí sea necesario utilizar el método de la inducción matemática? Analizamos primero una sección, luego dos, luego tres, y así sucesivamente, y después tratamos de generalizar el resultado para n secciones en el caso cuando $n \to \infty$.

PROFESOR: No, aquí no es necesario el método de inducción matemática. Utilicemos el hecho de que si de un número infinito de elementos quitamos uno de ellos, la infinidad no varía debido a esto. Aislemos del esquema considerado la primera sección (el corte lo hacemos sobre la línea punteada en la figura 120 a), Evidentemente que, como antes, tendremos un número infinito de secciones, de tal suerte que la resistencia entre los puntos C y D debe ser igual a la resistencia R que buscamos. De esta manera, el esquema inicial tiene el aspecto indicado en la Figura 120 b. El sector del circuito en la figura 120 b, tiene una resistencia igual a

$$R_1 + RR_2/(R + R_2)$$

Puesto que el sector indicado es equivalente al esquema inicial, su resistencia debe ser igual a la resistencia R que buscamos. Así pues, obtenemos

$$R = R_1 + RR_2/(R + R_2)$$

es decir, una ecuación de segundo grado respecto de R

$$RR^2 - RR_1 - R_1R_2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, encontramos

$$R = \frac{R_1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\right] \qquad (179)$$

ESTUDIANTE A: Este método es realmente muy interesante,

PROBLEMAS

63. En el circuito eléctrico de la Figura 121 se conoce: E = 4 V, r = 1 ohm, R = 45 ohm. Determinar las indicaciones del voltímetro y del amperímetro.

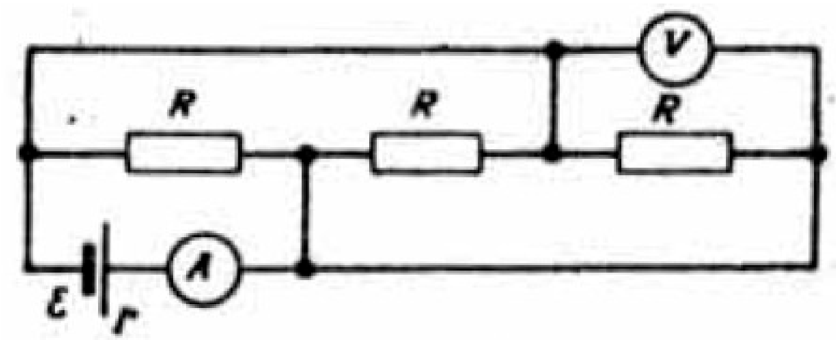


Figura 121.

64. Encontrar la resistencia del cuadrado representado en la figura 119 a, cuandose lo conecta al circuito en los pontos A y C.

65 Un hexágono regular junto con sus diagonales está hecho de alambres. La resistencia de cada alambre es igual a R. El hexágono se conecta a un circuito como se indica en la figura 122 a. Encontrar la resistencia total del hexágono.

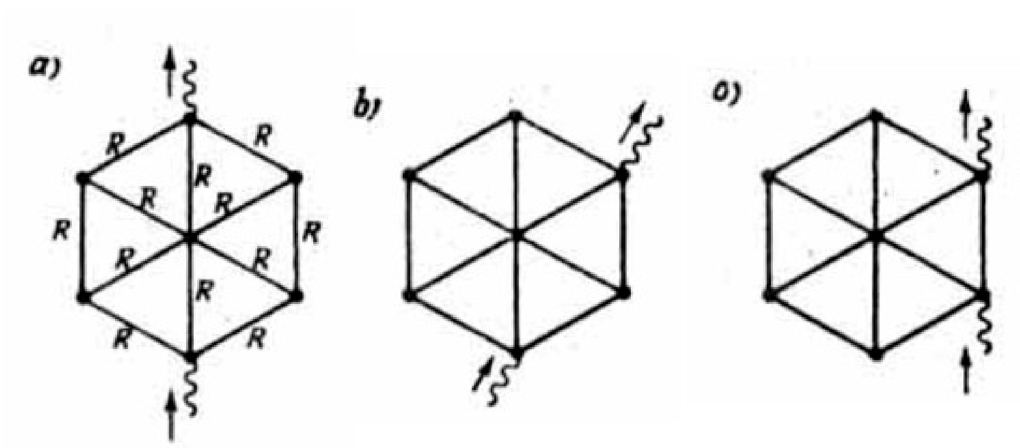


Figura 122.

66. Encontrar la resistencia total del hexágono del problema 65, cuando se lo conecta al circuito en la forma indicada en la figura 122 b.

67. Calcular la resistencia equivalente del hexágono, dado en el problema 65, cuando se lo conecta al circuito, como se indica en la figura 122 c.

§ 30. ¿POR QUE SE FUNDIÓ LA BOMBILLA?

ESTUDIANTE A: ¿Por qué se funde una bombilla eléctrica: debido a un voltaje demasiado alto o debido a una corriente demasiado intensa?

PROFESOR: ¿Cómo respondería usted a esta pregunta?

ESTUDIANTE A: Me parece que es debido a una corriente demasiado alta.

PROFESOR: Su respuesta no es buena. Primero que todo quiero anotar que la pregunta formulada por usted pertenece a la categoría de las preguntas provocadoras. La bombilla se funde debido a un desprendimiento excesivo de una gran cantidad de calor en la unidad de tiempo, o sea, como resultado de un aumento brusco de la potencia de la corriente. El aumento de la potencia de la corriente puede ser causado por la variación diferentes factores: el voltaje aplicado a la bombilla, la corriente que circula por ella, la resistencia de la bombilla. Respecto a esto, vamos a recordar todas las fórmulas que ustedes conocen de la potencia desprendida en cierta resistencia R.

ESTUDIANTE B: Yo conozco las siguientes fórmulas:

$$N = (\varphi_1 — \varphi_2)I \qquad (180)$$

$$N = I^2R \qquad (181)$$

$$N = (\varphi_1 — \varphi_2)^2/R \qquad (182)$$

donde N es la potencia, desprendida en la resistencia R; $(\varphi_1 — \varphi_2)$ es la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia R: I es la intensidad de la corriente que pasa a través de la resistencia considerada.

ESTUDIANTE A: Nosotros, por lo general, utilizábamos sólo la fórmula (181), que expresa la potencia en función del cuadrado de la intensidad de la corriente y de la resistencia.

PROFESOR: Se ve fácilmente que las tres fórmulas son equivalentes, ya que es posible pasar de una a otra, aplicando la ley de Ohm. La equivalencia de estas fórmulas indica precisamente que para saber si la bombilla se ha fundido no se deben analizar por separado la corriente y el voltaje, sino que es necesario analizar el conjunto de estas tres magnitudes: tanto la intensidad de la corriente como el voltaje y la resistencia. (Dirigiéndose al estudiante A): A propósito, ¿por qué usted le da preponderancia precisamente a la fórmula (181)?

ESTUDIANTE A: Puesto que comúnmente el voltaje aplicado a la bombilla es constante y entonces la dependencia entre la potencia y el voltaje no tiene importancia. La fórmula (181) es más «empleada».

PROFESOR: No hace bien en darle preferencia a la fórmula (181). Veamos un problema. *Un hornillo eléctrico tiene tres secciones de igual resistencia. Si las tres secciones están conectadas en paralelo, el agua de una tetera hierve a los 6 minutos. ¿En cuánto tiempo hervirá una cantidad igual de agua en la tetera para las diferentes conexiones de las secciones del hornillo eléctrico indicadas en la figura 123?*

ESTUDIANTE A: Primero encontramos la resistencia total del hornillo eléctrico para cada variante de las conexiones, llamando R a la resistencia de una sección. En el caso inicial (conexión en paralelo) la resistencia total R_0 es igual a R/3. En los casos a, b, c (ver figura 123), respectivamente, tendremos:

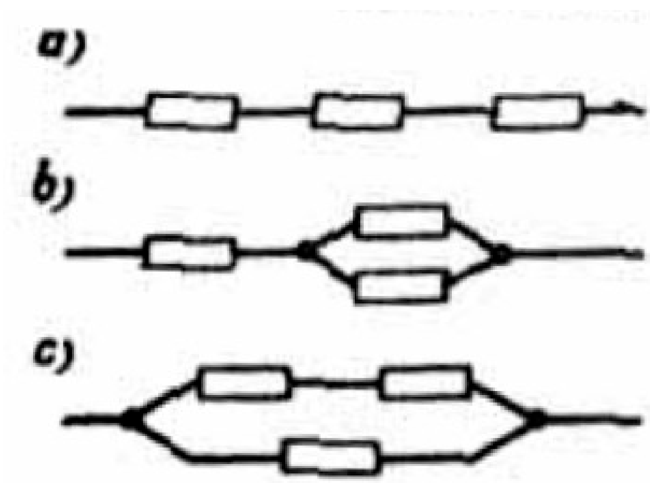


Figura 123.

$$R_a = 3R$$

$$R_b = R + (R/2) = (3/2)R$$

$$R_c = 2R^2/(3R) = (2/3)R$$

Si llamamos U al voltaje aplicado al hornillo eléctrico, utilizando la ley de Ohm, encontramos la intensidad de la corriente total que pasa por el hornillo eléctrico en cada caso...

PROFESOR (interrumpiendo): No es necesario encontrar la intensidad de la corriente. Representemos por t_0, t_a, t_b, t_c los tiempos necesarios para calentar el agua de la tetera en cada uno de los casos considerados. El calor desprendido es igual al producto de la potencia de la corriente por el tiempo del calentamiento. En cada uno de los casos indicados el calor desprendido es el mismo. Expresando la potencia de la corriente por medio de la fórmula (182), obtenemos

$$U^2t_0/R_0 = U^2t_a/R_a = U^2t_b/R_b = U^2t_c/R_c \qquad (184)$$

colocando en (184) las relaciones (183) y simplificando luego los factores comunes (U^2 y $1/R$), encontramos

$$3t_0 = t_a/3= 2t_b/3 = 3t_c/2.$$

De aquí obtenemos fácilmente los valores de las magnitudes que buscamos: $t_a = 9t_0 = 54$ min, $t_b = 9t_0/2= 27$ min, $t_c = 2t_0 = 12$ min. Quiero anotar que en el problema dado resultaría más cómodo utilizar la fórmula (182) para la potencia, puesto que el voltaje aplicado al hornillo eléctrico es una magnitud constante. Veamos ahora la siguiente pregunta. Sea una fuente de corriente con una f.e.m. E y con una resistencia interna r, conectada a cierta resistencia externa R. ¿A qué es igual el rendimiento de dicha fuente?

ESTUDIANTE B: El rendimiento de la fuente de corriente es la razón entre la potencia útil, o sea, la potencia que se desprende en la resistencia externa, y la potencia total, es decir, la suma de las potencias desprendidas en las resistencias externa e interna:

$$\eta = \frac{I^2R}{I^2(R+r)} = \frac{R}{R+r} \qquad (185)$$

PROFESOR: Correcto. Supongamos que la resistencia interna de la fuente no varía y varía únicamente la resistencia externa. ¿Cómo variará en este caso el rendimiento de la fuente de corriente?

ESTUDIANTE B: Para R = 0 (en caso de cortocircuito) η = 0. Para R = r, η = 0,5 y cuando R crece hasta infinito el valor del rendimiento tiende a la unidad.

PROFESOR: Exactamente. ¿Y cómo varía en tal caso la potencia útil (la potencia desprendida en la resistencia externa)?

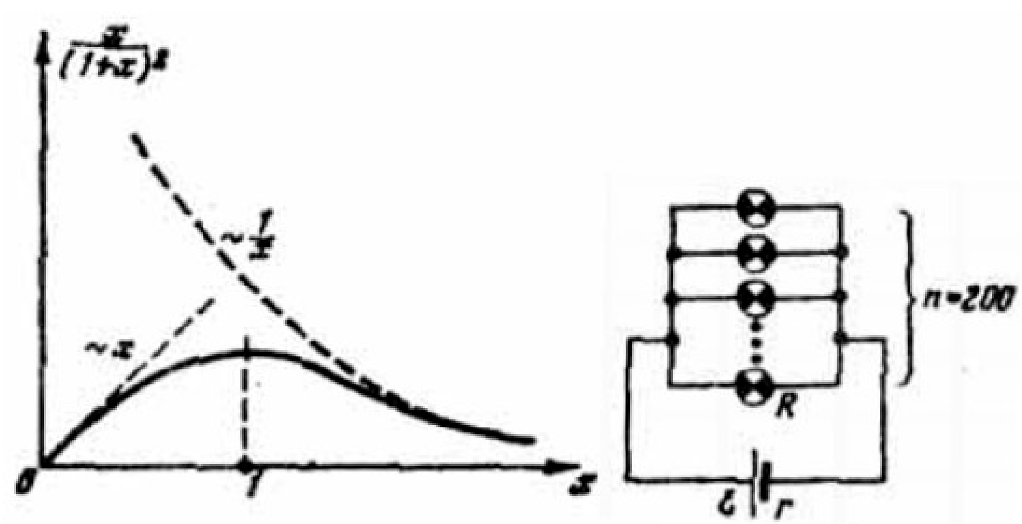
ESTUDIANTE B: Puesto que al crecer R aumenta el rendimiento de la fuente, por lo tanto, aumentará también la potencia útil. En síntesis, cuanto mayor sea R. mayor será la potencia útil.

PROFESOR: Es falso. El aumento del rendimiento de la fuente de corriente significa que aumenta la razón entre la potencia útil y la potencia total de la fuente aunque la potencia útil puede disminuir, puesto ,que ésta es igual a

$$N_u = \frac{E^2}{(R+r)^2}R = \left(\frac{E^2}{r}\right)\frac{x}{(x+1)^2} \qquad (186)$$

donde x = R/r. Si x « 1 entonces N_u ~ x. Si x » 1, N_u ~ 1/x.

N_u toma el valor máximo para x = 1 (R = r) y entonces $N_u = E^2/(4r)$. La figura 124 muestra la gráfica de la función $y= x/(x + 1)^2$, la cual indica la variación de la potencia útil a medida que crece la resistencia externa.



Figuras 124 y 125.

Veamos el siguiente problema: *doscientas bombillas iguales de 300 ohm de resistencia cada una están conectadas a una fuente de corriente de una f.e.m. = 100 V y de una resistencia interna de 0,5 ohm. Calcular la potencia desprendida en cada bombilla, y la variación relativa de la potencia, desprendida en una bombilla, cuando una de las doscientas bombillas se ha fundido. La resistencia de los alambres de conexión se desprecia* (figura 125).

ESTUDIANTE B: La corriente total que circula por el circuito externo es igual a

$$I_t = E/(r + R/n) = 50 \text{ A}$$

La corriente que pasa a través de una bombilla es igual a

$$I = I_1/n = 0{,}25 \text{ A}$$

De aquí encontramos la potencia, que se desprende en una sola bombilla:

$$N = I^2R = 37{,}5 \text{ V}$$

Para calcular la variación relativa de la potencia desprendida en una bombilla, cuando una de las doscientas bombillas se ha fundido, hallo primero la potencia N, en una de las bombillas para n = 199 y luego calculo la razón

$$f = (N_1 - N)/N \qquad (187)$$

PROFESOR: No me gusta la manera como usted calcula la magnitud f. Esta hay que .expresarla en general, por intermedio de las resistencias R y r y del número n de bombillas:

$$N = \left(\frac{R}{n^2}\right)\frac{E^2}{\left(r + \frac{R}{n}\right)^2}$$

$$N_1 = \frac{R}{(n-1)^2}\frac{E^2}{\left(r+\frac{R}{n}\right)^2}$$

Al colocar estas expresiones en la fórmula (187), obtenemos

$$f = \left(\frac{N_1}{N} - 1\right) = \frac{nr + R}{nr - r + R} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{r}{nr + R}} - 1$$

La fracción en el denominador de la última igualdad es mucho menor que la unidad (debido a que hay demasiadas bombillas y la resistencia de una de ellas es mucho mayor que la resistencia interna de la fuente de corriente). Por lo tanto, tomamos la fórmula aproximada (173)

$$f = \left(1 - \frac{r}{nr+R}\right)^{-1} - 1 \approx \frac{2r}{nr+R} \qquad (188)$$

Colocando en la fórmula (188) las valores numéricos de las condiciones del problema, encontramos f =0,0025.

ESTUDIANTE B: ¿Y por qué usted no calcula primero a N_1 para que después. cuando coloquemos los valores numéricos en la fórmula (187), obtenga el valor de f?

PROFESOR: Usted ve que f = 0,0025. Es decir, que para obtener este resultado según su método (numérico), es necesario calcular el valor de N con una exactitud de cuatro signos. A priori usted no sabe inclusive con qué exactitud debe calcular N_1. Si en nuestro caso usted hubiese calculado a N_1 con una exactitud de dos signos, habría llegado a la conclusión de que la potencia N_1 coincide con la potencia N.

PROBLEMAS

68. En el circuito eléctrico representado en la figura 126 están dados: E = 100 V, r = 36 ohm; el rendimiento de la fuente es igual al 50%. Calcular la resistencia R y la potencia útil.

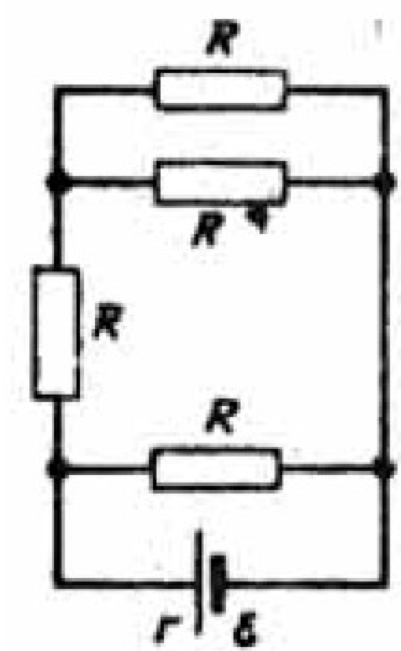


Figura 126.

69. El circuito de una fuente de corriente lo cierran a través de una resistencia cuyo valor es cuatro veces mayor que el valor de la resistencia interna de la fuente. ¿Cómo cambia el rendimiento de ésta si a la resistencia externa le conectamos en paralelo una resistencia más, cuyo valor es dos veces mayor que el de la resistencia interna de la fuente?

70. Varias resistencias iguales cada una a R están conectadas como se indica en la figura 127. En un caso esta combinación la conectamos a una fuente de corriente en los puntos 1 y 2 en otro, en los puntos 1 y 3. Calcular la resistencia interna de la fuente, si la razón entre los rendimientos de fa fuente de corriente en el primero y segundo casos es igual a 165 . Encontrar estos valores del rendimiento.

71. En un hornillo eléctrico las resistencias están conectadas según la combinación representada en la figura 127.

Esta combinación se conecta a la red en los puntos 1 y 2, haciendo hervir después de cierto tiempo 500 g de agua. ¿Qué cantidad de agua se puede hervir durante el mismo tiempo, si la combinación de las resistencias del hornillo eléctrico se conecta a la red en los puntos 1 y 3?

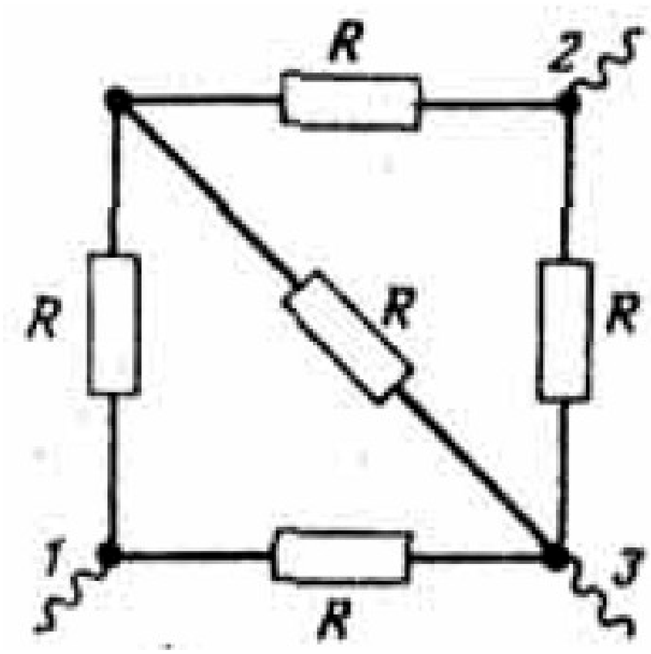
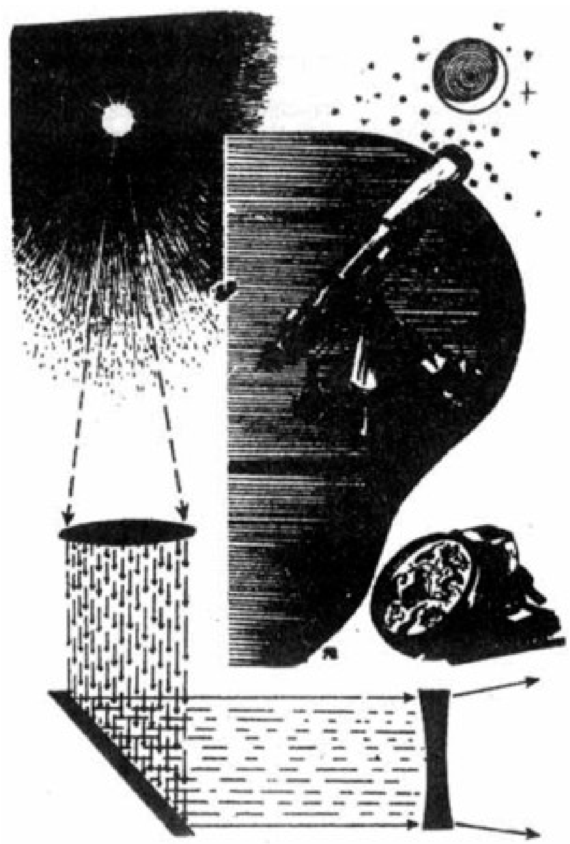


Figura 127.

La temperatura inicial del agua en ambos casos es la misma. Se desprecian las pérdidas térmicas,

72. 1,5 litros de agua, a 20° C de temperatura, se colocan durante 15 min en un hornillo eléctrico, que tiene dos secciones con igual resistencia. Cuando conectamos las secciones paralelamente, el agua hierve en el tiempo indicado y 100 g de ésta se evaporan. ¿Qué sucederá con el agua, si conectamos las secciones en serie y la calentamos durante 60 min? El calor especifico del vapor es de 539 cal/g. ¿Cuánto tiempo se necesita para calentar esta agua hasta hervir, cuando está conectada solamente una sección?

Capítulo 12



Hace mucho tiempo que el hombre conoce las leyes de la óptica geométrica. Sin embargo, hasta ahora continúan asombrándonos por su elegancia y perfección Para que usted se convenza de esto, practique la construcción de imágenes en diferentes sistemas ópticos. Discutamos las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz.

§ 31. ¿SABE USTED COMO SE REFLEJAN Y REFRACTAN LOS RAYOS DE LUZ?

PROFESOR: Enuncie las leyes de la reflexión y refracción de la luz.

ESTUDIANTE A: La ley de la reflexión es la siguiente: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. La ley de la refracción es: la razón entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es igual al índice de refracción del medio.

PROFESOR: Sus enunciados son muy poco precisos, porque, primero, usted no indicó que el rayo incidente y el reflejado (o el refractado) descansan en un mismo plano con la normal a la superficie de reflexión (o de refracción) levantada en el punto de incidencia. Si esto no se dice, es posible representar la reflexión tal como se indica en la figura 128.

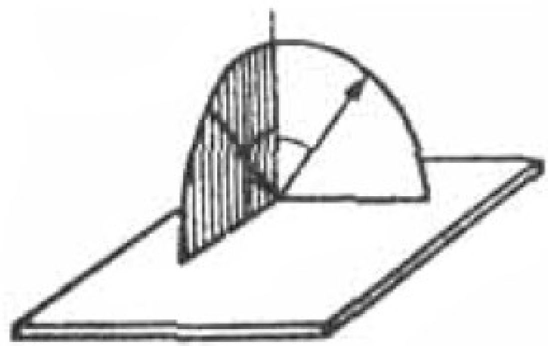


Figura 128.

Segundo, su enunciado de la ley de refracción se refiere al caso particular cuando el rayo cae del aire a otro medio cualquiera. En general, si el rayo cae desde un medio con índice de refracción n_1, sobre la superficie de otro medio cuyo índice de refracción es n_2 y si llamamos α_1 al ángulo de incidencia y α_2 al ángulo de refracción, en tal caso la ley de la refracción se escribe de la siguiente manera.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (189)$$

Su enunciado se deduce de esta fórmula, si suponemos que para el aire $n_1 = 1$.

Veamos el siguiente problema. *Una moneda está sumergida en el agua a una profundidad H. Si miramos desde arriba y en dirección vertical. ¿A qué profundidad vemos la moneda?*

ESTUDIANTE A: Yo sé que la moneda nos parecerá que está a menor profundidad, pero me es difícil responder más concretamente.

PROFESOR: Tracemos desde la moneda dos rayos: OA y OB_1B (figura 129).

El rayo OA no se refracta (puesto que es vertical); el rayo OB_1B se refracta. Supongamos, que estos dos rayos divergentes caen sobre el ojo; el ojo ve la imagen de la moneda en el punto donde se cortan los rayos divergentes AO y BB_1, es decir, en el punto O_1.

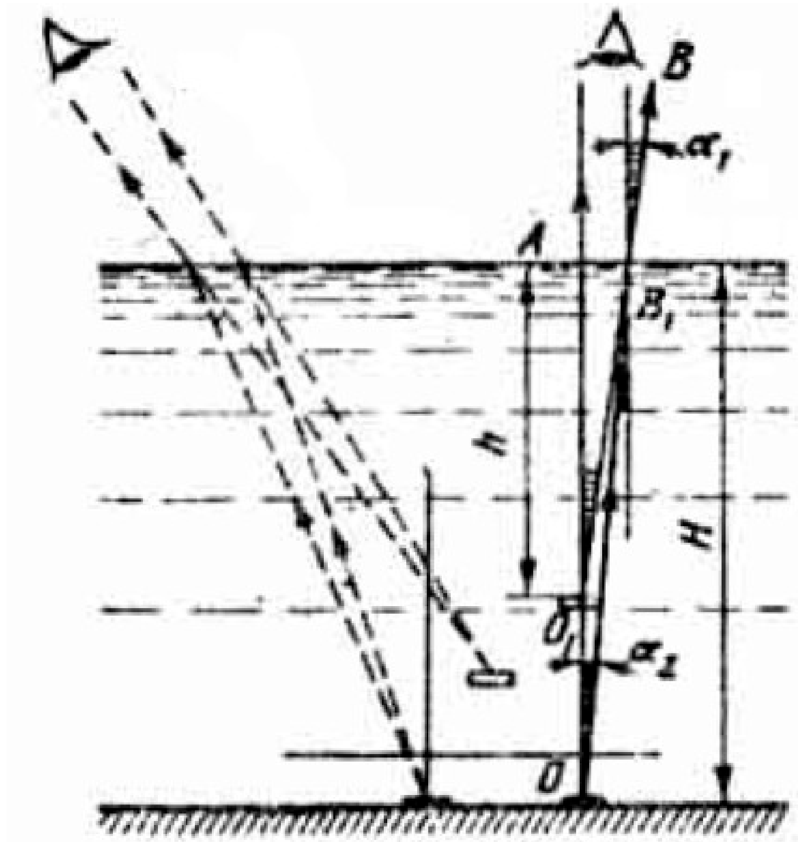


Figura 129.

Del dibujo se ve que la distancia que buscamos h está relacionada con la profundidad según la relación

$$h \text{ tg } \alpha_1 = H \text{ tg } \alpha_2$$

de aquí

$$h = H (\text{tg } \alpha_2 / \text{tg } \alpha_2) \qquad (190)$$

Como los ángulos α_1 y α_2 son muy pequeños, se puede utilizar la fórmula aproximada

$$\text{tg } \alpha \approx \text{sen } \alpha \approx \alpha \qquad (191)$$

(aquí el ángulo no se expresa en grados sino en radianes). Utilizando (191), escribirme la fórmula (190) en la forma

$$h \approx H(\text{sen } \alpha_2 / \text{ sen } \alpha_1) = H/n \qquad (192)$$

Como para el agua n = 4/3, entonces resulta h = (3/4)H

ESTUDIANTE B: ¿Y qué sucede si miramos a la moneda no verticalmente sino de un lado?

PROFESOR: En este caso veremos la moneda no solamente más arriba sino también desplazada a lo lejos (ver las líneas punteadas de la figura 129). Por supuesto que en este caso el cálculo se complica más. Resolvamos el siguiente problema. *Un buceador de altura h se encuentra en el fondo de un lago a una profundidad H. Calcular la distancia mínima desde el punto donde se encuentra el buzo, hasta los puntos del fondo que el buzo puede ver reflejados en la superficie del agua.*

ESTUDIANTE A: Yo sé resolver esta clase de problemas. Llamemos L a la distancia que buscamos. El trayecto del rayo desde el punto A hasta el ojo del buzo está representado en la figura 130; A es el punto más cercano al buceador que éste puede ver reflejado en la superficie del agua. Así, por ejemplo, el rayo desde un punto más cercano B se refracta en la superficie del agua y no regresa hasta el buceador (ver línea punteada en la figura 130); α es el ángulo de reflexión interna total y se calcula utilizando la fórmula

$$\text{sen } \alpha = l/n \qquad (193)$$

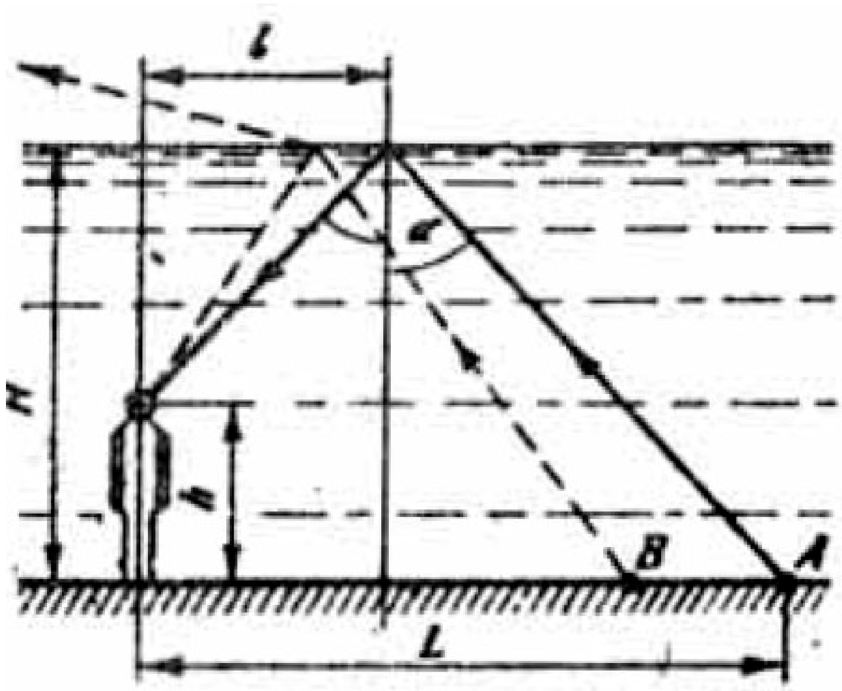


Figura 130.

Del dibujo se ve fácilmente que

$$L = h \operatorname{tg} \alpha + 2 (H - h) \operatorname{tg} \alpha = (2H - h) \operatorname{tg} \alpha$$

Puesto que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$

utilizando (193), obtenemos

$$L = \frac{(2H - h)}{\sqrt{n^2 - 1}} \qquad (194)$$

Colocando n = 4/3, hallamos que L= (3√5) (2H — h).

PROFESOR: Exactamente. ¿Qué verá el buceador sobre su cabeza?

ESTUDIANTE A: El verá exactamente sobre sí mismo un círculo luminoso de radio

$$l = \frac{(2H - h)}{\sqrt{n^2 - 1}} = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)(H - h)$$

(ver figura 130). En los alrededores de este círculo verá las imágenes de los objetos que se encuentran en el fondo.

ESTUDIANTE B: ¿Y qué sucederá si el fondo sobre el cual está parado el buceador no es plano sino inclinado?

PROFESOR: En este caso la distancia L dependerá de la dirección en que mire el buceador. No es difícil imaginarse que dicha distancia será mínima cuando el buceador mira hacia arriba, a lo largo del plano inclinado, y será máxima cuando mire en dirección contraria. El resultado que obtuvimos en el problema anterior se podrá aplicar aquí cuando el buceador mira en la dirección en la cual la altura del fondo no varía (a lo largo de la orilla). El problema del fondo inclinado lo dejamos para que ustedes mismos lo resuelvan (ver problema 74).

ESTUDIANTE A: ¿Se puede cambiar la dirección del rayo colocando en su camino un sistema de láminas planas transparentes?

PROFESOR: ¿Y cómo cree usted?

ESTUDIANTE A: Yo creo que en principio es posible, puesto que en el interior de una lámina el rayo al retractarse toma otra dirección.

ESTUDIANTE B: Yo no estoy de acuerdo. Después de las láminas el rayo de todas maneras seguirá la misma dirección inicial.

PROFESOR: Demuestre esto con el ejemplo de un sistema de varias láminas con diferentes índices de refracción.

ESTUDIANTE B: Yo tomo tres láminas, cuyos coeficientes de refracción sean n_1, n_2 y n_3. El recorrido del rayo en este sistema está representado en la figura 131.

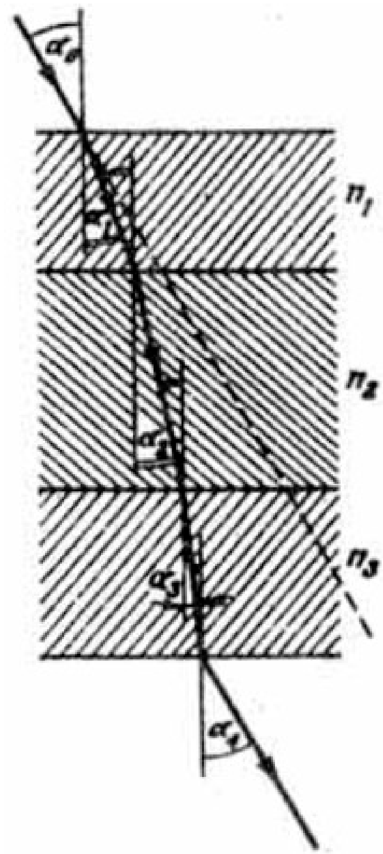


Figura 131.

Teniendo en cuenta la refracción del rayo en cada una de las superficies de separación, escribimos:

$$(\text{sen } \alpha_0 / \text{sen } \alpha_1) = n_1$$

$$(\text{sen } \alpha_1 / \text{sen } \alpha_2) = n_2/n_1$$

$$(\text{sen } \alpha_2 / \text{sen } \alpha_3) = n_3/n_2$$

$$(\text{sen } \alpha_3 / \text{sen } \alpha_4) = 1/n_3$$

Multiplicando los miembros de la izquierda y de la derecha de estas igualdades, obtenemos

$$(\text{sen } \alpha_0 / \text{sen } \alpha_4) = 1$$

Por lo tanto, $\alpha_0 = \alpha_4$, lo que se quería demostrar.

PROFESOR: Exactamente. Ahora encontremos los límites de la aplicación de las leyes de la óptica geométrica.

ESTUDIANTE B: Estas leyes no son válidas para distancias del orden de la longitud de la onda luminosa y menores a ésta. A distancias tan pequeñas empiezan a manifestarse las propiedades ondulatorias de la luz.

PROFESOR: Es correcto. Generalmente los examinandos no saben esto lo suficientemente bien. Y cuando se trata de distancias grandes, ¿existen limitaciones para el empleo de las leyes de la óptica geométrica?

ESTUDIANTE B: Si la distancia es mayor que la longitud de onda de la luz, el problema se puede analizar dentro de los marcos de la óptica geométrica. Así nos enseñaron y por esto creo que para las grandes distancias no hay limitaciones en el uso de la óptica geométrica.

PROFESOR: Usted se equivoca. Imagínese el siguiente caso: usted envía un rayo de luz al espacio cósmico, excluyendo la posibilidad de su dispersión. Supongamos que en el transcurso de un segundo usted gira el instrumento con el cual envía el rayo de luz, un ángulo de 60°. Se pregunta: ¿con qué velocidad se desplazarán durante este giro los puntos del rayo, que se encuentran a distancias mayores a 300.000 km del instrumento?

ESTUDIANTE B: Entiendo su pregunta. Tales puntos deben desplazarse con una velocidad mayor que la velocidad de la luz. Aunque, de acuerdo con la teoría de la relatividad, los cuerpos materiales no pueden alcanzar velocidades mayores que la de la luz. Sin embargo, aquí se trata de un rayo.

PROFESOR: ¿Acaso un rayo de luz no es material? Como usted ve, la óptica geométrica no es válida para distancias demasiado grandes. En tal caso es necesario tener en cuenta que un rayo de luz es un chorro de partículas, es decir, un flujo de fotones. Los fotones que han salido del dispositivo hasta el instante en que nosotros lo hemos girado «no saben» nada acerca del giro y continúan su movimiento en la misma dirección en que fueron emitidos. Los nuevos fotones volarán en otra dirección. Así pues, nosotros no observamos ningún giro del rayo de luz como un todo.

ESTUDIANTE B: ¿Cómo valorar cuantitativamente el límite de aplicación de las leyes de la óptica geométrica para distancias grandes?

PROFESOR: Las distancias deben ser tales que el tiempo que la luz necesita para recorrerlas sea mucho menor que las tiempos característicos del problema dado (por ejemplo, mucho menores que los tiempos del giro del dispositivo que emite el rayo de luz). En este caso el rayo como un todo no se destruye y nosotros podemos sin temor aplicar la óptica geométrica.

PROBLEMAS

73. Miramos desde arriba y verticalmente un objeto cubierto por una lámina de vidrio sobre la cual se deposita agua. El espesor de la lámina es de 5 cm y el de capa de agua, de 10 cm. El índice de refracción del vidrio es 1.6. ¿A qué distancia de la superficie del agua veremos la imagen del objeto?

74. Un buceador de 1,8 m de altura se encuentra a una profundidad de 3 m sobre un fondo que tiene forma de plano inclinado cuyo ángulo de inclinación es de 15°. Calcular la distancia mínima a lo largo del fondo, desde el punto donde se encuentra el buceador hasta los puntos del fondo, que el buceador puede ver reflejados en la superficie del agua.

75. Sea una lámina de vidrio de 5 cm de espesor con un índice de refracción de 1,5, ¿Bajo qué ángulo de incidencia (desde el aire) los rayos reflejado y refractado en la lámina serán mutuamente perpendiculares? Calcular para este ángulo de incidencia el desplazamiento del rayo al pasar a través de la lámina considerada.

76. Sea una lámina de vidrio de espesor d con un coeficiente de refracción n. El ángulo de incidencia sobre la lámina de un rayo que viene del aire es igual al ángulo de reflexión interna total para el vidrio de que está hecha la lámina. Calcular el desplazamiento del rayo al pasar a través de la lámina dada.

§ 32. ¿COMO CONSTRUYE USTED LAS IMÁGENES EN LOS ESPEJOS Y LENTES?

PROFESOR: Es un hecho frecuente, que los examinandos no sepan construir correctamente las imágenes en los diferentes sistemas ópticos, como, por ejemplo, en los lentes y en los espejos planas y curvos. Veamos una serie de ejemplos.

Construya la imagen de una persona en un espejo plano para el caso representado en la figura 132 a.

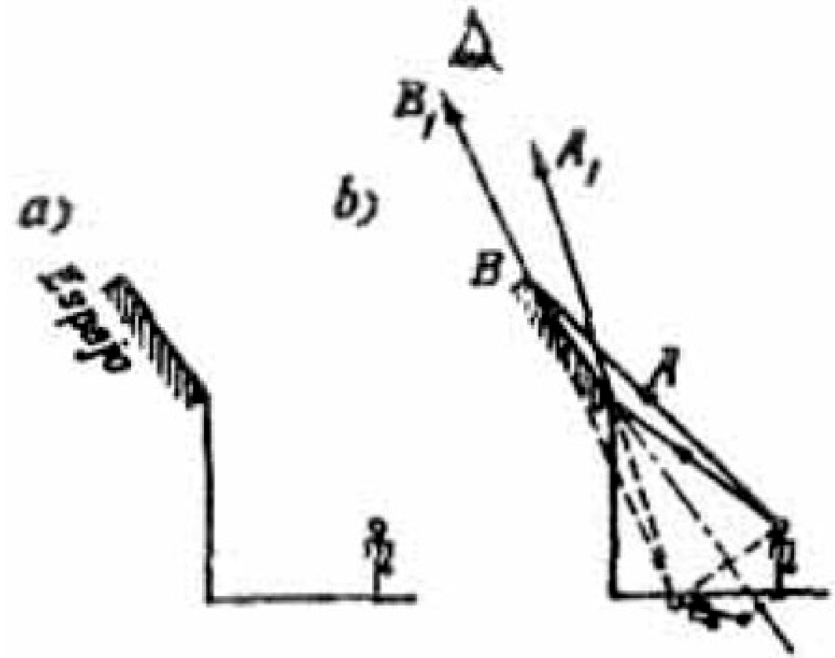


Figura 132.

ESTUDIANTE A: Me parece que en este caso no habrá ninguna imagen en el espejo, puesto que éste está colocado muy arriba.

PROFESOR: Se equivoca. Sí habrá imagen y su construcción está indicada en la figura 132 b. No es difícil persuadirnos de que para reconstruir la imagen debemos simplemente prolongar el plano del espejo y colocar la imagen en forma simétrica con relación a dicho plano.

ESTUDIANTE A: Pero. ¿la persona puede ver su imagen?

PROFESOR: Esta ya es otra pregunta. La persona, en realidad, no verá su imagen puesto que el espejo está colocado muy arriba, y además inclinado en forma desfavorable. La imagen de la persona la verán solamente los observadores que se encuentren dentro de los límites del ángulo formado por los rayos AA_1 y BB_1. Cabe recordar que en el ojo del observador debe incidir el haz de los rayos que divergen del objeto observado. El ojo verá la imagen del objeto en el lugar donde estas rayos se corten, o donde se corten sus prolongaciones (ver figuras 129 y 132 b).

Analicemos la construcción de una imagen en un sistema de dos espejos planos perpendiculares entre sí (figura 133 a).

ESTUDIANTE A: Simplemente hay que hacer reflejar el objeto en los dos planos de los espejos, obteniendo así dos imágenes corno se indica en la figura 133 b.

PROFESOR: Usted no tuvo en cuenta una tercera imagen más. Fíjese que los rayos que salen del objeto dentro de los límites del ángulo recto AOB (figura 133 c) experimentan dos reflexiones en vez de una: primero en un espejo y luego, en el otro.

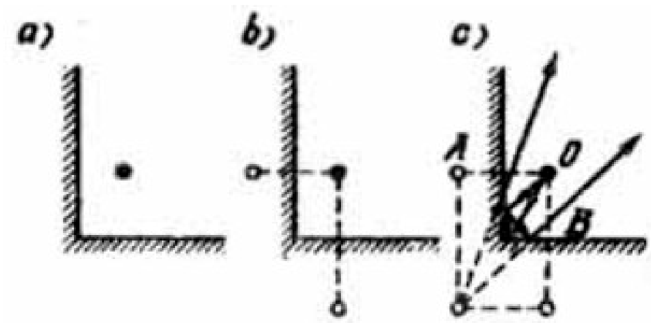


Figura 133.

En la figura 133 c, se indica el recorrido de dos de estos rayos. La tercera imagen del objeto se encuentra en el punto donde se cortan las prolongaciones de estos rayos. Veamos algunas ejemplos con una lente convergente. Construya la imagen del objeto en la lente representada en la figura 134 a.

ESTUDIANTE A: Es muy sencillo. Mi construcción se muestra en la figura 134, b.

PROFESOR: Está bien. Ahora suponga que la mitad de la lente está cubierta con una pantalla no transparente, como se indica en la figura 134, c. ¿Qué pasa con la imagen en este caso?

ESTUDIANTE A: En este caso la imagen desaparece.

PROFESOR: Se equivoca. Usted olvida que la imagen de cualquier punto de la flecha (por ejemplo, de uno de sus extremos) no se obtiene como resultado del corte de dos rayos únicamente, sino de un número infinito de ellos (figura 134 d).

Generalmente nos limitamos a trazar nada más que dos rayos, puesto que para determinar la posición de la imagen es suficiente según el recorrido de dos de éstos. La pantalla en el caso dado retiene solamente una parte de los rayos que inciden sobre la lente y los demás pasan a través de ésta formando así la imagen del objeto (figura 134, e) . Puesto que ahora en la formación de la imagen toma parte un número menor de rayos, la imagen será menos brillante.

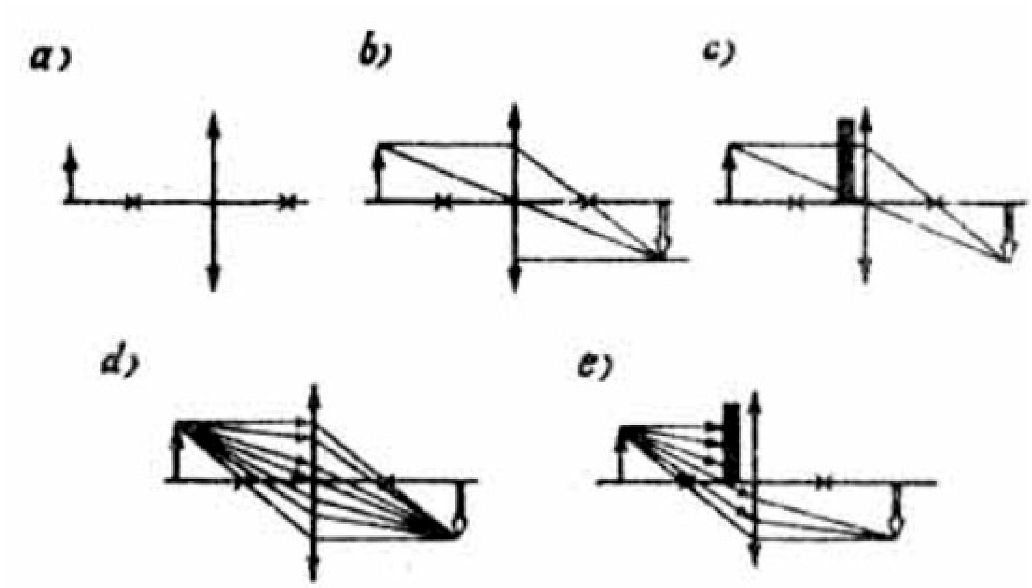


Figura 134.

ESTUDIANTE B: De sus explicaciones se concluye que, al tapar una parte de la lente con una pantalla no transparente, tan sólo cambia la brillantez de la imagen y nada más. Sin embargo, todo fotógrafo sabe que al cerrar el diafragma de la cámara fotográfica, es decir, al disminuir el área útil de la lente, además de disminuir la brillantez de la imagen, se observa otro efecto: la imagen se vuelve más nítida. ¿Cómo se explica esto?

PROFESOR: Su pregunta es muy oportuna, puesto que ahora puedo subrayar lo siguiente: todas las construcciones las hemos hecho despreciando los defectos que el sistema óptico (en nuestro caso unas lentes) pueda tener. En realidad, aquí el término «defectos» no es completamente apropiado. puesto que no se trata de insuficiencias aleatorias de las lentes sino más que todo de sus propiedades de principio. Es sabido que, si sobre una lente inciden dos rayos paralelos al eje óptico principal de la lente y a diferentes distancias de este, entonces, después de refractarse en la lente, estos rayos cortarán al eje óptico principal, hablando rigurosamente, en puntos diferentes (figura 135 a), es decir, el foco de la lente (el punto donde se cortan todas los rayos paralelos al eje óptico principal) resulta esparcido y la imagen del objeto no es bien nítida.

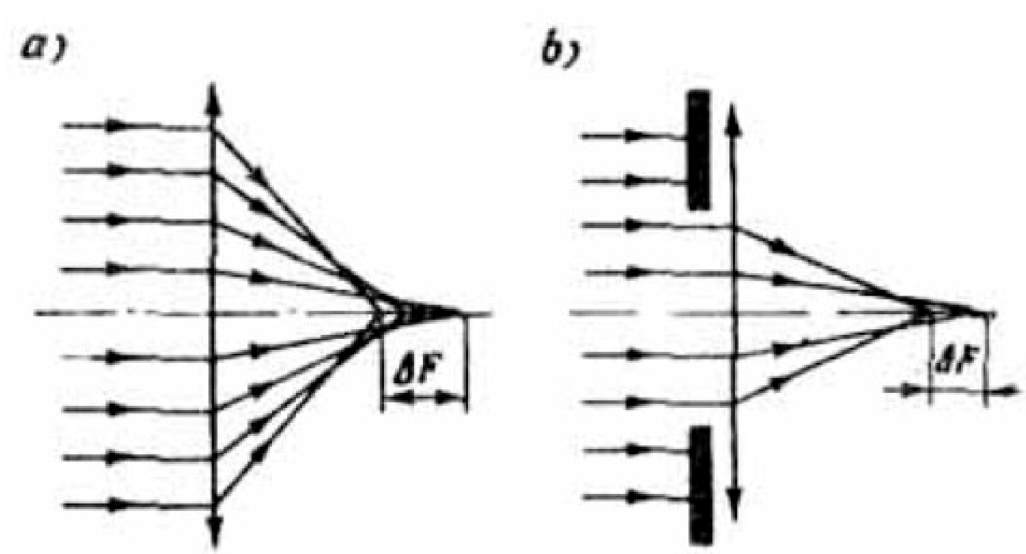


Figura 135.

Este esparcimiento será mayor, cuanto mayores sean las distancias de los diferentes rayos del haz al eje óptico principal. Al cerrar el diafragma de la lente, a través de éste pasará un haz luminoso más fino y como consecuencia de esto la claridad de la imagen mejorará un poco (figura 135 b).

ESTUDIANTE B: ¿Es decir que con el diafragma ganamos en nitidez, pero perdemos en brillantez de la imagen?

PROFESOR: Exactamente. Sin embargo, hay que tener en cuenta que al construir las imágenes en las lentes, los examinandos tienen derecho a considerar que los rayos paralelos se cortan siempre en un solo punto. Este punto descansa sobre el eje óptico principal, cuando el haz de rayos paralelos ha sido dirigido a lo largo del eje indicado y descansa en el plano focal, cuando el haz de los rayos paralelos ha sido dirigido formando cierto ángulo con el eje óptico. Es importante que los examinandos entiendan que un análisis de esta naturaleza es aproximado y que para obtener mayor precisión es necesario introducir algunas correcciones de las aberraciones de los sistemas ópticos.

ESTUDIANTE A: ¿Y qué es el plano focal de una lente?

PROFESOR: Es el plano que pasa por el foco de la lente y perpendicular a su eje óptico principal. Veamos la siguiente pregunta: *¿en qué se diferencia la imagen en un espejo plano de la imagen obtenida en una lente convergente en el ejemplo representado en la figura 134?*

ESTUDIANTE A: En el primer caso (en el espejo) la imagen es virtual, mientras que en el segundo casa ésta es real.

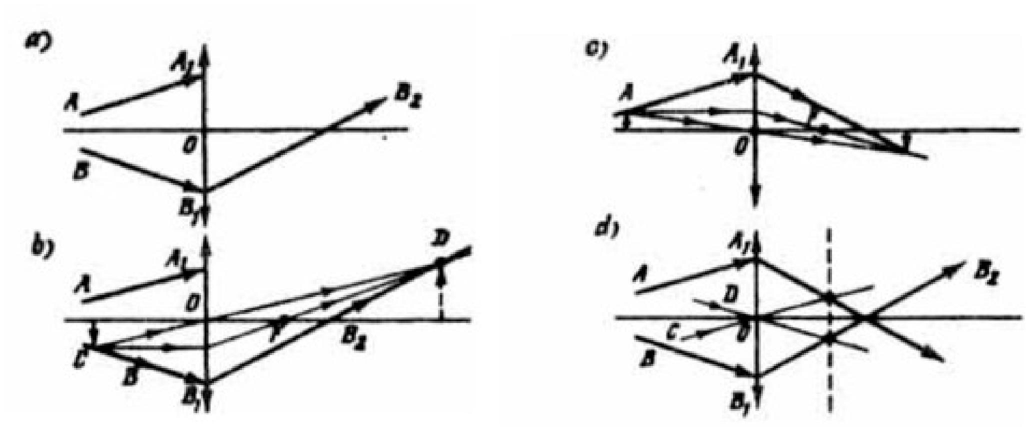


Figura 136.

PROFESOR: Correcto. Indique de manera detallada, cuál es la diferencia entre una imagen virtual y una imagen real.

ESTUDIANTE B: La imagen virtual no se forma en los puntos donde se cortan los rayos mismos, sino en los puntos donde se cortan sus prolongaciones, mientras que la imagen real se forma en los puntos donde se cortan los rayos mismos. No es extraño que una imagen virtual se encuentre, digamos, detrás de la pared, es decir, allí donde los rayos no pueden de ninguna manera aparecer.

PROFESOR: Correcta. Dese cuenta, además, de que la imagen virtual se puede observar solamente desde determinadas posiciones, mientras que cuando se trata de una imagen real, usted puede colocar una pantalla en el lugar donde se encuentra la imagen y observarla desde cualquier posición. Analicemos el ejemplo, representado en la figura 136 a. Se pide encontrar la dirección del rayo AA_1 después de que éste pasa a través de una lente convergente, si se conoce la trayectoria de otro rayo que pasa por dicha lente (el rayo BB_1B_2 de la figura).

ESTUDIANTE A: ¡Pero si no sabemos cuál es la distancia focal de la lente!

PROFESOR: No obstante, nos dan el recorrido de un rayo antes y después de la lente.

ESTUDIANTE A: Nosotros nunca hicimos construcciones de esta clase.

ESTUDIANTE B: Pienso que primero se debe determinar la distancia focal de la lente. Para esto podemos trazar en algún sitio a la izquierda de la lente una flecha vertical de tal manera que su extremo se encuentre sobre el rayo BB_1. Llamemos C a este punto (figura 136 b). Luego trazamos desde el punto C un rayo, que pase por el centro de la lente. Este rayo pasará a través de la lente sin refractarse y en cierto punto E cortará al rayo B_1B_2. El punto E es, evidentemente, la imagen del extremo de nuestra flecha. Ahora queda por trazar desde el extremo C de la flecha un tercer rayo, paralelo al eje principal de la lente. Este rayo al refractarse debe pasar por la imagen del extremo de la flecha que ahora conocemos, es decir, por el punto E. El punto de corte del rayo indicado con el eje principal viene a ser el foco que buscamos de la lente. Todas estas construcciones están dadas en la figura 136 b. Luego, sabiendo la distancia focal de la lente, construimos la trayectoria del rayo AA_1 después de refractado. Para esto dibujamos una flecha más cuyo extremo se encuentre sobre el rayo AA_1 (figura 136 c). Utilizando la distancia focal de la lente que hemos determinado construimos la imagen de la flecha indicada. El rayo que buscamos pasará por el punto A_1 y por el extremo de la imagen de la flecha. Estas construcciones se muestran en la figura 136 c.

PROFESOR: Sus razonamientos son justos y se fundamentan en el hecho de que usted busca la imagen de cierto objeto auxiliar (a flecha). Anoto que este método es cómodo utilizarlo en el caso, por ejemplo, cuando a usted le piden determinar la posición de la imagen de un punto luminoso, que se encuentra en el eje principal de la lente. En tal caso resulta cómodo levantar en el punto luminoso una flecha y construir su imagen. Por supuesto que la base de la imagen de la flecha será la imagen que buscamos del punto luminoso. Sin embargo, en el caso arriba considerado este método resulta demasiado largo. Yo le indicaré un método de construcción más simple. Para determinar la distancia focal de la lente trazo a través de su centro el rayo EO, paralelo al rayo BB_1, (figura 136 d). Puesto que los dos rayos van paralelos, se cortan después de la lente en el plano focal (el corte del plano focal se representa en la figura 136 d, por medio de una línea punteada).

Luego trazo el rayo CO que pasa por el centro de la lente y que es paralelo al rayo AA_1. Partiendo del hecho de que estos dos rayos por ser también paralelos deben cortarse después de atravesar la lente en el plano focal, determino la dirección que busco del rayo AA_1 después de que dicho rayo ha pasado a través de la lente. De esta manera, como usted ve, el problema resulta mucho más sencillo.

ESTUDIANTE B: Si, este método de construcción es por supuesto más sencillo.

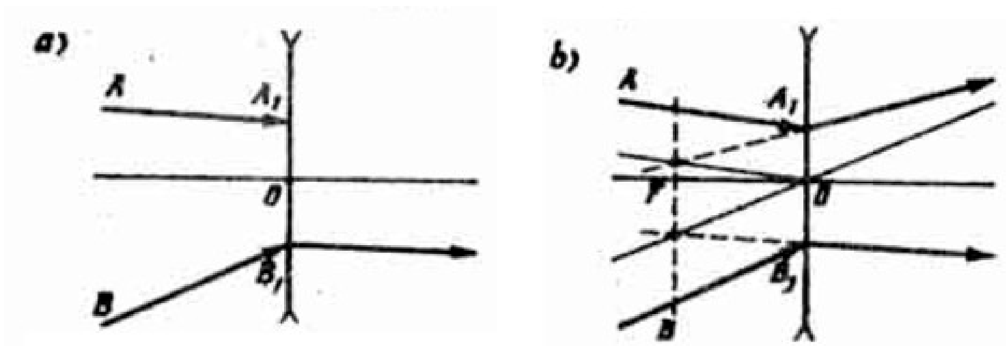


Figura 137.

PROFESOR: Traten de resolver, utilizando este método, un problema análogo, en el cual en lugar de la lente convergente se utilice una lente divergente (figura 137 a).

ESTUDIANTE B: Trazo un rayo paralelo al rayo BB_1 y que pasa por el centro de la lente (figura 137 b). A diferencia del problema anterior, ahora no se cortarán los rayos mismos, sino sus prolongaciones (observemos. que para el rayo que pasa por el centro, la prolongación coincide con el mismo rayo) debido a lo cual el plano local que contiene al punto de corte, no se encontrará ahora a la derecha, sino a la izquierda de la lente (ver línea punteada en la (figura 137 b).

PROFESOR (para hacer una observación): Subrayemos que en las lentes divergentes, las imágenes son siempre virtuales.

ESTUDIANTE A (continuando): Luego trazo a través del centro de la lente un rayo paralelo al rayo AA_1 y partiendo de la condición de que las prolongaciones de estos rayos se cortan en el plano focal, construyo el rayo que buscamos.

PROFESOR: Bien, ahora responda cualitativamente a la siguiente pregunta: ¿en qué lugar se encontrará la imagen de un objeto, una parte del cual se encuentra delante del foco de una lente convergente y la otra parte, detrás del foco (el objeto tiene un espesor finito)?

ESTUDIANTE B: Construyo la imagen de varios puntos del objeto, situadas a diferentes distancias de la lente. En este caso, los puntos situados detrás del foco darán una imagen real (que se encontrará a la derecha de la lente), mientras que los puntos situados delante del foco darán una imagen virtual (esta imagen se encontrará a la izquierda de la lente). A medida que los puntos escogidos se acercan al foco, sus imágenes irán alejándose al infinito (a la izquierda o a la derecha).

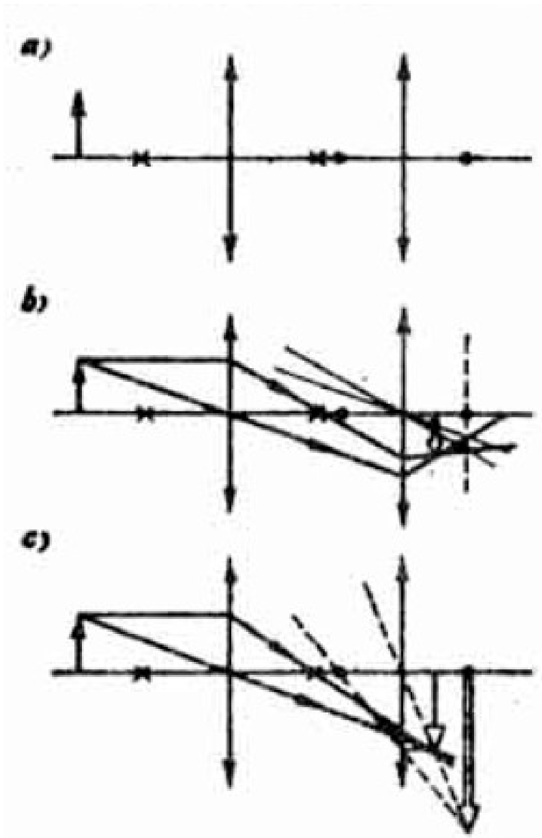


Figura 138.

PROFESOR: Perfecto. Sí pues, en el caso considerado la imagen del objeto se compone de dos pedazos (a la izquierda y a la derecha de la lente), cada uno de los cuales empieza a cierta distancia finita de la lente y luego se propaga hasta el infinito. Como usted ve, es posible responder afirmativamente a la pregunta: ¿puede tener un objeto al mismo tiempo una imagen virtual y otra real? Veo que usted comprende suficientemente bien el método para la construcción de las imágenes en las lentes. Por lo tanto, podemos pasar a una pregunta más complicada: la construcción de las imágenes en un sistema de dos lentes. Veamos el siguiente problema: se tienen dos lentes convergentes con un eje óptico principal común y diferentes distancias focales. Se pide construir la imagen de una flecha vertical en dicho sistema óptico (figura 138 a) Los focos de una de las lentes están indicarlos por medio de cruces y los de la otra, por medio de circulitos.

ESTUDIANTE A: Para construir la imagen de la flecha en el sistema de dos lentes, es necesario construir primero su imagen en la primera lente. En tal caso, podemos no tomar en cuenta a la segunda lente. Luego consideramos esta imagen como objeto y sin tener en cuenta la primera lente, construimos su imagen en la segunda lente.

PROFESOR: Usted ha cometido un error que es muy característico. Varias veces he escuchado esta respuesta que es falsa. Consideremos dos rayos que salen de la punta de la flecha y sigamos su trayectoria a través del sistema de lentes dado (figura 138 b). El trayecto de los rayos después de la primera lente se determina fácilmente. Para explicarnos la trayectoria de los rayos después de la segunda lente, trazamos rayos auxiliares, paralelos a los originales y que pasan por el centro de la segunda lente. Para esto utilizamos el método, que estudiamos en los ejemplos anteriores (los rayos paralelos, después de atravesar la lente, deben cortarse en el plano focal). En el punto de corte de los rayos después de la segunda lente se encontrará la imagen que buscamos de la punta de la flecha. Todas las construcciones se muestran en la figura 138 b. Ahora fíjese que resultado hubiésemos obtenido, si hubiéramos aplicado su metódica. La construcción se da en la figura 138 c. Aquí la construcción de la imagen en la primera lente se ha representado por medio de líneas llenas y su continuación en la segunda lente por medio de líneas punteadas. Como puede observar, en este caso obtendríamos un resultado completamente diferente (un resultado falso).

ESTUDIANTE B: Pero yo recuerdo muy bien que nosotros construimos la imagen precisamente en la forma como lo he propuesto.

PROFESOR: Posiblemente que ustedes así lo construyeron. Lo que sucede es que el método de construcción que usted ha propuesto, en casos separados, puede justificarse. ya que conduce a resultados que coinciden con los, obtenidos utilizando mi método. Esto se puede demostrar en el ejemplo dado, si acercamos la flecha hacia la primera lente, es decir, la colocamos delante de su foco. En la figura 139 a, se muestra la construcción de la imagen según mi método y en la figura 139 b, según el suyo. Como usted ve, en este caso los dos resultados coinciden.

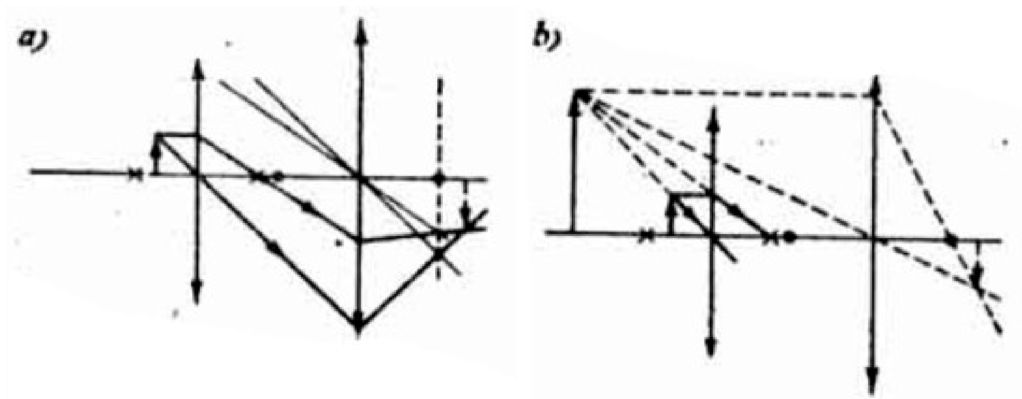


Figura 139.

ESTUDIANTE B: ¿Y cómo se puede saber en qué casos, precisamente, se puede utilizar mi método para la construcción de la imagen?

PROFESOR: Para dos lentes no sería difícil formular las condiciones necesarias para poder utilizar su método. Para un número mayor de lentes estas condiciones se complican. Por esta razón, no es necesario analizarlas. Utilice siempre mi método y todo saldrá bien.

Para terminar, quiero formular una pregunta más: ¿puede ser convergente una lente bicóncava?

ESTUDIANTE B: Conozco esta pregunta. Una lente bicóncava en condiciones corrientes es una lente divergente. Sin embargo, se convierte en una lente convergente, si se la introduce en un medio que tenga un índice de refracción mayor que el índice de refracción del material de la lente, mientras que una lente biconvexa en un medio semejante será divergente.

§ 33. ¿SABE USTED RESOLVER CORRECTAMENTE LOS PROBLEMAS DE LOS ESPEJOS Y DE LAS LENTES?

PROFESOR: Quiero hacer algunas observaciones de carácter general, las cuales pueden resultar muy útiles al resolver diferentes problemas relacionados con las lentes y los espejos esféricos (cóncavos y convexos). Las fórmulas que se utilizan para la solución de esta clase de problemas se clasifican en dos grupos. Al primer grupo pertenecen las fórmulas que relacionan entre sí a la distancia focal F de una lente (el espejo), con la distancia d entre el objeto y la lente (el espejo) y con la distancia ¡entre la imagen y la lente (el espejo),

$$(1/d) + (1/f) = (1/F) \qquad (195)$$

donde d, f, y F se consideran como magnitudes algebraicas, cuyos signos pueden ser diferentes en diferentes casos. En tal forma son posibles tres casos representados en el siguiente esquema.

Lentes convergentes y espejos cóncavos

d < f	d > f
1). $d > 0$, $F > 0$, $f > 0$	2). $d > 0$, $F > 0$, $f < 0$
La imagen es real	La imagen es virtual

Lentes divergentes y espejos convexos

3). $d > 0$, $F < 0$, $f < 0$
La imagen es virtual

De esta manera, d es siempre positiva; la distancia focal F es positiva para las lentes convergentes y los espejos cóncavos, negativa para las lentes divergentes y los espejos convexas; la distancia f es positiva para las imágenes reales y negativa para las imágenes virtuales.

ESTUDIANTE A: Si he entendido correctamente, con ayuda de este esquema se puede obtener tres fórmulas, a partir de la fórmula general (195), en las cuales intervienen los valores aritméticos de las magnitudes:

1er caso: (1/d) + (1/f) = (1/F)

2do caso: (1/d) — (1/f) = (1/F) (196)

3er caso: (1/d) — (1/f) = — (1/F)

PROFESOR: SI, usted ha entendido correctamente.

ESTUDIANTE A: Yo no había prestado atención a la analogía entre las lentes y los espejos esféricos correspondientes.

PROFESOR: Al segundo grupo pertenecen las fórmulas que relacionan la distancia focal de una lente (un espejo) con sus demás características. Para los espejos existe una relación sencilla

F = ± (R/2) (197)

donde R es el radio de curvatura del espejo; el signo positivo se refiere a los espejos cóncavos (el foco es positivo), el signo negativo se refiere a los convexos (el foco es negativo). Para las lentes tenemos

$$\left(\frac{1}{F}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (198)$$

donde n es el índice de refracción del material de que está hecha la lente, R_1 y R_2 son los radios de curvatura de la lente. Si el radio R se refiere a la cara convexa de la lente, se toma entonces con signo positivo, si se refiere a la cara cóncava de la lente, se tomará entonces con signo negativo. No es difícil comprobar que las lentes biconvexas, planoconvexas y cóncavoconvexas son lentes convergentes, ya que, según la fórmula (198), éstas tienen foco positivo.

ESTUDIANTE A: ¿Y cómo quedaría la fórmula (198), si a la lente la introducimos en un medio cuyo índice de refracción es igual a n_0?

PROFESOR: En este caso en lugar de (198) tendremos

$$\left(\frac{1}{F}\right) = \left(\frac{n}{n_0} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (199)$$

Si pasamos de un medio ópticamente menos denso ($n_0 < n$) a otro medio ópticamente más denso ($n_0 > n$), entonces de acuerdo con la fórmula (199) el signo del foco cambia y por esta razón una lente convergente se transforma en divergente y al contrario, una lente divergente se vuelve convergente Pasaremos a la solución de problemas concretos. *La cara convexa de una lente planoconvexa cuyo radio de curvatura es igual a R y su índice de refracción igual a n se la cubre con una capa de plata y debido a esto obtenernos un espejo cóncavo peculiar. Encontrar la distancia focal de dicho espejo.*

ESTUDIANTE A: Permítame resolverlo. Dirigimos un rayo paralelo al eje óptico principal. Al reflejarse en la superficie plateada de la lente, este rayo, al salir de ésta, es refractado (figura 140).

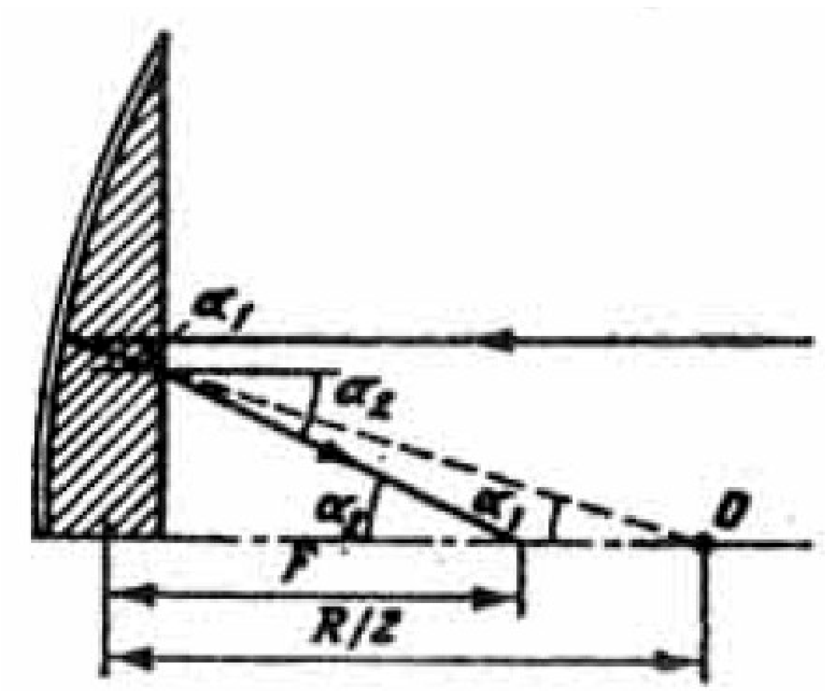


Figura 140.

Si el rayo no se refractara, entonces cortaría al eje principal a la distancia R/2 del espejo de acuerdo con (197). Como resultado de la refracción, el rayo corta al eje principal un poco más cerca del espejo. Llamemos F al foco que buscamos. De la figura vemos, que

$$(R/2)\ \text{tg}\ \alpha_1 = F\ \text{tg}\ \alpha_2$$

Puesto que los ángulos α_1 y α_2 son pequeños, podemos utilizar la fórmula (191) y obtenemos:

$$(R/2F) = (\text{tg}\ \alpha_2/\text{tg}\ \alpha_2) \approx (\text{sen}\ \alpha_2/\text{sen}\ \alpha_1) = n.$$

De ahí hallamos que

$$F = R/(2n) \qquad (200)$$

ESTUDIANTE B: Yo sugiero resolver este problema de otra manera. Se sabe que si unimos dos sistemas cuyas distancias focales sean F_1 y F_2, el nuevo sistema tendrá una distancia focal F que se determina según la regla para la suma de los aumentos ópticos

$$(1/F)=(1/F_1) + (1/F_2) \qquad (201)$$

En el caso dado se trata de una lente de distancia focal $F_1 = R/(n-1)$ de acuerdo con la fórmula (198), donde uno de los radios hay que hacerlo igual a infinito, y de un espejo cóncavo, pera el cual F = R/2. Colocando en la fórmula (201) las expresiones para F_1 y F_2 hallamos

$$(1/F) = (n - 1)/R + (2/R) \qquad (202)$$

de donde

$$F = R/(n + 1) \qquad (203)$$

De aquí vemos que el estudiante A resolvió mal el problema [ver su resultado (200)].

PROFESOR (al estudiante B): No, usted es quien se equivoca, el resultado (200) es correcto.

ESTUDIANTE B: ¿Entonces, en este caso la regla (201) no es correcta?

PROFESOR: Esta regla es correcta y en nuestro caso se puede utilizar.

ESTUDIANTE B: ¡Pero si es correcta la (201), lo será también y la (202)!

PROFESOR: Aquí está su error. El asunto consiste en que en este problema el rayo pasa a través de la lente dos veces (ida y vuelta). Por esta razón es necesario agregar la luminosidad del espejo y dos lentes y en lugar de la expresión (202) se debe escribir

$$(1/F) = 2\,(n - 1)/R + (2/R)$$

de donde hallamos que

$$(1/F) = (2n - 2 + 2)/R$$

y, por consiguiente, F = R/2n, lo cual coincide exactamente con el resultado (200). Analicemos otro problema. *Una lente convergente aumenta 4 veces la imagen de un objeto. Si dicho objeto lo desplazamos 5 cm, el aumento disminuye en dos veces. Encontrar la distancia focal de la lente.*

ESTUDIANTE A: Esta clase de problemas me confunde: es necesario dibujar la trayectoria de los rayos en la posición inicial, luego en la segunda y compararlas.

PROFESOR: Yo creo que en este caso no es necesario dibujar la trayectoria de los rayos. De acuerdo con la fórmula (195) escribimos para la posición dada

$$(1/F) = (1/d_1) + (1/f_1)$$

Teniendo en cuenta que $f_1/d_1 = k_1$ es el aumento en la posición inicial, obtenemos

$$(1/F) = (1/d_1) + (1/k_1 d_1) = (k_1 + 1)/(k_1 d_1)$$

o sea

$$d_1 = F(k_1 + 1)/k_1$$

Análogamente para la segunda posición tenemos

$$d_2 = F(k_2 + 1)/k_2$$

De esta manera,

$$d_2 - d_1 = F(k_1 - k_2)/k_1k_2 \qquad (204)$$

Según las condiciones del problema $d_1 - d_2 = 5$ cm, $k_1 = 4$, $k_2 = 2$. Colocando estos valores numéricos en (201), encontramos F = 20 cm.

PROBLEMAS

77. Una lente con distancia focal da una imagen virtual del objeto 1.5 veces más pequeña. ¿De qué lente se trata (convergente o divergente)? ¿Dónde está colocado el objeto? ¿Cuál será el tamaño y en dónde se encontrará la imagen del objeto si alejamos a la lente 24 cm respecto al objeto?

78. Un punto luminoso se encuentra a una distancia de 15 cm y sobre el eje óptico de un espejo cóncavo cuyo radio de curvatura es igual a 50 cm. ¿En dónde se encuentra la imagen del punto? ¿Qué sucederá con la imagen si alejamos el espejo 15 cm del punto?

79. Un sistema óptico está compuesto de lentes convergente y divergente (figura 141 a; las cruces representan los focos de las lentes). Las distancias focales de las lentes son iguales a 40 cm.

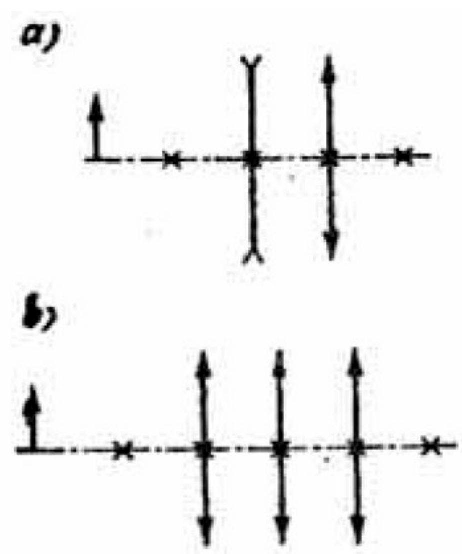


Figura 141.

Un objeto se encuentra a una distancia de 80 cm delante de la lente divergente. Construir la imagen del objeto en el sistema dado y determinar su posición.

80. Un sistema óptico está compuesto de tres lentes iguales convergentes cuyas distancias focales son iguales a 30 cm, y colocadas una respecto a la otra según lo indica la figura 141 b (las cruces son los focos de las lentes). Un objeto se encuentra a una distancia de 60 cm de la lente del extremo. ¿Dónde estará la imagen del objeto en dicho sistema?

81. La cara convexa de una lente planoconvexa cuyo radio de curvatura es de 60 cm es plateada y debido a esto se obtiene un espejo cóncavo peculiar. Delante de este espejo y a una distancia de 25 cm de éste se coloca un objeto. Encontrar la distancia entre el espejo y la imagen del objeto y los aumentos de la imagen, si el índice de refracción del material de la lente es igual a 1.5.

82. La cara cóncava de una lente planocóncava cuyo radio de curvatura es igual a 50 cm es plateada y así obtenemos un espejo convexo peculiar. Delante de este espejo y a una distancia de 10 cm del espejo colocamos un objeto. Encontrar la distancia entre el espejo y la imagen y el .aumento de la imagen, si el índice de refracción del material de la lente es igual a 1,5.

RESPUESTAS

Problema	Respuesta
1	20 m; 1 s; v_A=10,2 m/s; v_B = 10,6 m/s.
2	v_0 = 11,3 m/s; x = 4 m; y = 0,8 m; t = 0,5 s; v_A = 9.4 m/s; v_B = 15,2 m/s
3	1) $t\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1^2v_2^2cos(\alpha_1+\alpha_2)}$ 2) $t\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1^2v_2^2sen\,\alpha_1 sen\,\alpha_2}$
4	$\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{(H-h)}{g}}+\sqrt{\frac{(H+3h)}{2g}}$
5	ctg α = (P – 4F)/(4P)
6	$2(v_0{}^2/g)(sen\ \alpha/\ cos^2\ \alpha$
7	13,8 m/s
8	37,2 m/s; 1280 J
9	2,6 m/s^2; 42 N; 8,5 N
10	3,3 m/s^2; 13 N
11	3,5 m/s^2; 33,6 N; 50,4 N
12	6,9 m/s^2; 8,8 N; 16,2 N; 1,5 N
13	-
14	-
15	0,45
16	7 : 4 : 1
17	$\sqrt{}$5gR
18	$81\pi/(8\gamma T^2)$
19	h = $R[1-g/(\omega^2R)]$ F = $m\omega^2R$
20	1,5 R
21	120 kg/m^3
22	3900 J

23	0,27
24	0,5
25	$F = mg(H/h + 1) - vg\rho_B$ $h_1 = 2h(v\rho_B/m - 1) - H$
26	7,5 km/h; 4,65 m.
27	$H = (v_0^2/2g)(m/M)^2 \cdot \cos^2\alpha \,\text{sen}\,\alpha/(\text{sen}\,\alpha + k\cos\alpha)$
28	1) $h_1 = (2/9g)(4gl\,\text{sen}^2\,\alpha/2 + v_0^2)$; $h_2 = (1/18g)(4gl\,\text{sen}^2\,\alpha/2 + v_0^2)$ 2) $h = (1/18g)(4gl\,\text{sen}^2\,\alpha/2 + v_0^2)$
29	$v_{min} = [(m + M)/m]\sqrt{5gl}$
30	$H(M - m)/(M + m)$
31	$HM/(4M + 3m)$
32	$(3/4)\sqrt{3/2}$
33	5
34	0,43 m/s
35	27,4 m/s^2
36	1,28 N; 1,28 N; 0,62 N; 1,56 N
37	En la distancia (3/22)R a la derecha del centro del disco
38	0,05 V/S
39	11,3 cm; 13,4 mg
40	Baja 3 cm; 15,4 mg
41	59 g
42	1) 138 J; 2) 171 J
43	Aumenta 1,5 cm; 21,5 mg
44	735 g; no cae; 0,58%
45	$3\cdot10^{-8}$ s; $5\cdot10^{8}$ m/s
46	149 V/m
47	$(mg + Eq)/\cos\alpha$; $(mg + Eq)\cdot l\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot\text{tg}\alpha/2$
48	$[(m_1 - m_2)g + E(q_1 - q_2)]/(m_1 + m_2)$ $[2m_1m_2g + (m_2q_1 + m_1q_2)E]/(m_1 + m_2)$

49	$\sqrt{\dfrac{5(mg+Eq)l}{m}}$
50	1,83 q
51	$\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}-\dfrac{q^2}{ml^2 sen^2\alpha}}$
52	$\sqrt{5gl-\left(\dfrac{q^2}{ml}\right)}$
53	0,2 A
54	1 A
55	0,16 A
56	9,9 V; 0,01
57	0,196 A; 0,02
58	$6\cdot10^{-6}$ C
59	$ECR_1R_2/(R_1r + 2R_2r + 2R_1R_2)$
60	$rdmv_0^2 \text{ tg } \alpha/(Eql — dmv_0^2 \text{ tg } \alpha)$
61	$rdmv_0^2/(Eql — dmv_0^2)$
62	arc tg $(3Eql/v_0^2md)$
63	3,75 V; 0,25 A
64	(2/3)R
65	(4/5)R
66	(3/4)R
67	(11/20)R
68	60 ohm; 70 V
69	Disminuye 1,4 veces
70	R/8; 89%; 83%
71	800 g
72	100 g de agua se convierten en vapor; 21 min
73	10, 8 cm
74	7,4 m
75	56°; 2,3 cm

76	$(d/n)[l — 1/\sqrt{(n^2 + 1)}]$
77	La lente es divergente; d = 15 cm; la imagen se aparte de la lente 4 cm; k = 0,4
78	L = 37,5 cm; la imagen se vuelve real; f_1 = 150 cm
79	A una distancia de 100 cm a la derecha de la lente convergente
80	En el lugar de ubicación de la lente del centro
81	f = 100 cm; k = 4
82	f = 63 cm; k = 0,63